Itinerario della ricerca matematica del XIX secolo

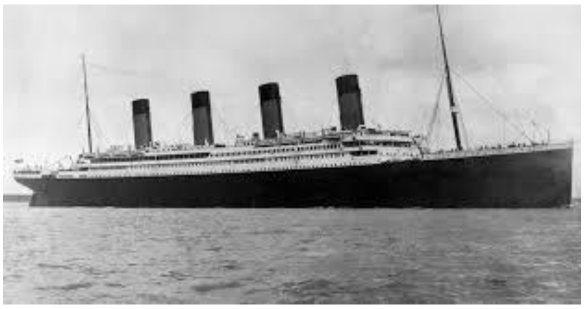
Sommario

INTRODUZIONE

Il XX secolo iniziò in Europa con l'esposizione universale di Parigi del 1900. In quel contesto si riunirono a convegno i più grandi matematici del tempo. Le attese e le aspirazioni erano quelle di risolvere i problemi rimasti aperti con la speranza di costruire una teoria matematica perfetta, ovvero coerente e completa. Inaspettatamente nel 1931 i due teoremi di incompletezza di Godel misero fine a questo sogno. I matematici compresero così che, con il metodo logico proprio della loro disciplina, la deduzione, non era possibile dimostrare i fondamenti e la natura della matematica.
Iniziò un periodo di profonde riflessioni finalizzato proprio a comprendere fino in fondo la natura della matematica e i suoi fondamenti.

CONTESTO STORICO-CULTURALE DI INIZIO SECOLO

Il clima generale in Occidente all'affacciarsi del nuovo secolo, il ventesimo, era di grande ottimismo. Questo era dovuto a più fattori, uno dei quali era la prosperità economica, negli Stati Uniti e nei maggiori paesi europei, dovuta allo sfruttamento delle risorse delle colonie e delle loro materie prime e anche alla lunga pace nel mondo dopo il conflitto franco-prussiano del 1870, che portò anche ad una serenità globale diffusa. Inoltre era in corso la seconda rivoluzione industriale, che portò con sé numerose scoperte ed invenzioni, come ad esempio i primi tram o la luce elettrica, le quali migliorarono la vita quotidiana anche delle persone più comuni che, vista la situazione economica, riuscivano ad usufruire di queste innovazioni e comodità. Anche i trasporti si svilupparono sempre di più: nel 1913 la rete ferroviaria mondiale raggiunse il milione di chilometri e si costruirono i primi grandi transatlantici tra cui il Titanic che venne presentato come la nave inaffondabile, e che con il suo naufragio del 1912, infranse il sogno di questa epoca di grande ottimismo, la cosiddetta Belle Epoque.



Il Titanic, 1912

Gare di atletica all'olimpiade di Atene, 1896

Oltre al mercato di massa in questo periodo iniziò anche l'intrattenimento di massa con l'avvento del cinema e la sempre maggiore diffusione dello sport a livello competitivo, sia a livello nazionale che internazionale (1896, prime olimpiadi dell'era moderna ad Atene). Ci furono grandi miglioramenti anche dal punto di vista igienico-sanitario che portarono ad un abbassamento del tasso di mortalità, in particolare quello infantile, e ad un incremento dell'aspettativa di vita. Anche la filosofia, tramite il positivismo, che si prefiggeva l'obbiettivo di descrivere ogni fenomeno con delle leggi effettive necessarie, alimentò il grande ottimismo presente in questi anni, in cui si credeva di poter evitare qualsiasi complicazione o comunque di riuscire a risolverla.

Esposizione universale di Parigi, 1900

Negli atti preparatori dell'esposizione universale di Parigi del 1900 infatti si legge: *«La fine del XIX secolo è un periodo che corona un secolo di prodigiosi sforzi scientifici ed economici, una nuova era di cui gli scienziati e i filosofi profetizzano la grandezza, nella quale la realtà supererà i nostri sogni e fantasie».* [1]

LA RICERCA MATEMATICA A CAVALLO TRA XIX E XX SECOLO

Uno dei fatti più rilevanti nella ricerca matematica del XIX secolo fu la scoperta delle geometrie non euclidee. Esse devono il loro nome al fatto che furono formulate in contrapposizione alla geometria euclidea, rifiutando il principio di intuizione ed evidenza sul quale Euclide l'aveva fondata, sostituendo l'intuizione con la non-contraddittorietà, secondo cui la teoria sarebbe stata corretta se non avesse presentato al suo interno conclusioni contraddittorie. Si constatò l'imprevista coerenza e solidità di altre due strutture geometriche logicamente equivalenti a quella che per secoli fu ritenuta l'unica vera geometria.

[1] Atti preparatori dell'Esposizione universale del 1900

Il carattere distintivo di questo secolo fu però la crescente esigenza di rigore concettuale e dimostrativo, trascurato nei secoli precedenti; per questo motivo il 1800 è chiamato "il secolo del rigore".

Nell'ultimo decennio ci furono tre scoperte molto importanti.
La prima fu **la definizione di numero irrazionale** di Dedekind e la conseguente creazione di un nuovo insieme numerico: i numeri Reali.
La seconda fu la formulazione da parte di Cantor della **teoria** cosiddetta **"ingenua" degli insiemi.** L'appellativo che le fu dato era dovuto al fatto che Cantor tornò ad usare il principio di ~~evidenza ed~~ intuizione euclideo senza cercare una rigorosità logica.
Infine ci fu la pubblicazione nel 1899 dei ***Grundlagen der geometrie*** di David Hilbert con i quali egli riscrisse tutta la geometria euclidea con rigorosità logica basata su nuovi assiomi.

L'anello di congiunzione tra il XIX secolo e il XX fu il convegno di matematica che si tenne nell'agosto del 1900, a Parigi durante l'esposizione universale. Questo convegno fu presieduto proprio da Hilbert che, spinto dal clima culturale di ottimismo, positività e sicurezza nel sapere scientifico, l'8 agosto~~,~~ espose nel suo intervento, i 23 problemi di vario genere matematico che erano ancora rimasti irrisolti. Inoltre affermò che "*sorge il problema dei principi alla base di queste idee* (le idee matematiche, ndr) *e di come fondarli su un sistema semplice e completo di assiomi"*[2]. L'intenzione di Hilbert era quella di creare una teoria coerente, ovvero non-contraddittoria, e completa: in essa ogni affermazione doveva essere dimostrabile o confutabile. Il metodo da utilizzare per la creazione di questa teoria doveva essere quello assiomatico poiché secondo Hilbert era *"inattaccabile dal punto di vista logico e allo stesso tempo fecondo"*.[3] Usando il metodo assiomatico si devono dichiarare degli assiomi sui quali fondare le dimostrazioni e i teoremi successivi del sistema creato che, per l'appunto, viene chiamato assiomatico.

[2] Conferenza tenuta al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi l'8 agosto 1900 da David Hilbert
[3] Ricerche sui fondamenti della matematica, David Hilbert

I PARADOSSI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI DI CANTOR

La necessità di riuscire a creare un sistema assiomatico completo e non contradditorio era stata sollecitata anche dall'enunciazione di diversi paradossi presenti nella teoria degli insiemi di Cantor che la mettevano in crisi.

Il paradosso di Burali-Forti

Il paradosso, formulato nel 1897 dal logico e matematico italiano Cesare Burali-Forti (1861-1931), afferma che l'insieme di tutti i numeri ordinali Ω possiede tutte le proprietà di un numero ordinale e sarebbe quindi a sua volta considerato un numero ordinale. Quindi si può costruire il suo successore $\Omega+1$, il quale è necessariamente maggiore di Ω. Ma questo numero ordinale $\Omega+1$ deve essere un elemento di Ω, in quanto Ω contiene tutti i numeri ordinali. Perciò si giunge alla conclusione che $\Omega< \Omega+1\leq \Omega$.

Il paradosso di Russell

In generale il paradosso di Russell si presenta quando si considera il fatto che *"l'insieme di tutti gli insiemi che appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso"* il che è appunto una contraddizione irrisolvibile.

Questo paradosso si può esemplificare tramite due versioni divulgative: quella del barbiere e quella del bibliotecario. Rispetto alla prima si pone il quesito: *"In un villaggio vi è un solo barbiere che rade tutti e solo gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Chi rade il barbiere?"* La contraddizione consiste nel fatto che il barbiere non può far parte né dell'insieme A: "uomini che non si radono da soli" né dell'insieme B: "uomini che si radono da soli" poiché in entrambi i casi nessuno, nemmeno lui stesso, rade il barbiere.

La versione del bibliotecario è invece questa: *"Al responsabile di una grande biblioteca viene affidato il compito di produrre gli opportuni cataloghi. Egli compie una prima catalogazione per titoli, poi per autori, poi per argomenti, poi per numero di pagine e così via. Poiché i cataloghi si moltiplicano, il nostro bibliotecario provvede a stendere il catalogo di tutti i cataloghi. A questo punto nasce una constatazione. La maggior parte dei cataloghi non riportano sé stessi, ma ve ne sono alcuni (quali il catalogo di tutti i volumi con meno di 5000 pagine, il catalogo di tutti i cataloghi, ecc.) che riportano sé stessi. Per eccesso di zelo, lo scrupoloso bibliotecario decide, a questo punto, di costruire il catalogo di tutti i cataloghi che non includono sé stessi. Il giorno seguente, dopo una notte insonne passata nel dubbio se tale nuovo catalogo dovesse o non dovesse includere sé stesso, il nostro bibliotecario chiede di essere dispensato dall'incarico."*

Il paradosso di Richard

Jules Richard (1862-1956) parte dalla constatazione che ogni intero può essere descritto in diversi modi e da espressioni formate da un numero differente di lettere, ad esempio 36 si può descrivere *trentasei* (nove lettere) oppure *quattro per nove* (quattordici lettere). Si possono dunque dividere tutti gli interi positivi in due gruppi: uno che include tutti gli interi che, almeno in un modo, possono essere descritti con massimo cento lettere; l'altro che contiene tutti gli interi descrivibili, con un minimo di centouno lettere. Siccome non tutti gli interi possono essere descritti con al massimo cento lettere, esiste nel secondo gruppo un intero minimo descrivibile con almeno centouno lettere. Esso però si può anche descrivere come *"il più piccolo intero non descrivibile con al massimo cento lettere"* che è una frase di meno di cento lettere. Quindi il più piccolo intero non descrivibile con al massimo cento lettere può essere descritto con meno di cento lettere.

Il paradosso di Grelling e Nelson

Kurt Grelling (1886-1941) e Leonard Nelson (1882-1927) pubblicarono il loro paradosso nel 1908. Essi convenivano che esistono alcune parole che descrivono sé stesse, come ad esempio la parola *polisillabica* che è per l'appunto polisillabica al contrario di *monosillabica* che invece non è monosillabica. Ora, chiamando le parole che non descrivono sé stesse eterologiche, si può dire che una parola X è eterologica se non è essa stessa X. Ma, se la parola X è *eterologica,* si arriva a dire che "eterologica" è eterologica se non è essa stessa eterologica.

Tutti questi paradossi in realtà si basano sulla contraddizione, rivelata dallo stesso Cantor, ovvero che, parlando dell'insieme di tutti gli insiemi, si rischia di cadere in una contraddizione, perché ad esempio la classe di tutte le idee è un'idea, ma la classe di tutti gli uomini non è un uomo. Quindi alcune classi contengono sé stesse mentre altre no e il fatto che un oggetto venga definito nei termini di una classe, che contiene l'oggetto stesso, genera i paradossi.

IL MOVIMENTO ASSIOMATICO

Tornando allo scopo di Hilbert, espresso al convegno di Parigi, di creare un sistema assiomatico coerente e completo, molti studiosi provarono a percorrere questa strada e così iniziò il cosiddetto "movimento assiomatico".

Ad esempio **Giuseppe Peano** (1858-1932) formulò cinque diversi assiomi riguardanti l'aritmetica per cercare di definire assiomaticamente i numeri naturali. Essi sono:

1) Esiste un numero naturale, 0

2) Ogni numero naturale ha un numero naturale successore

3) Numeri diversi hanno successori diversi

4) 0 non è il successore di alcun numero naturale

5) Ogni sottoinsieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali (assioma dell'induzione)

Gottlob Frege (1848-1925)

Gottlob Frege (1848-1925) nella sua opera *Begriffsschrift* (Ideografia, 1879) conferì una fondazione assiomatica della logica. La sua intenzione era quella di costruire la matematica come un'estensione della logica e lavorò a questo nei *Grundlagen der arithmetik* (I fondamenti dell'aritmetica, 1884) e nei *Grundgesetze der arithmetik* (I principi dell'aritmetica, 1893). Ma proprio quando la seconda opera stava per essere mandata in stampa Frege ricevette da Russell, il 16 giugno del 1902, una lettera in cui veniva informato dei paradossi sulla teoria degli insiemi, che contraddicevano anche la sua teoria. Egli pubblicò lo stesso il suo lavoro e lo concluse così: *E difficile che uno scienziato s'imbatta in qualcosa di meno desiderabile del vedere buttare a mare i fondamenti proprio quando ha appena finito il suo lavoro. Sono stato messo in questa posizione da una lettera del sig. Bertrand Russell proprio quando il lavoro stava per essere stampato.*[4]

Invece per quanto riguarda la teoria degli insiemi di Cantor, **Ernst Zermelo** (1871-1953) riteneva che i paradossi su di essa sorgessero dal fatto che, lo stesso Cantor, non aveva definito il concetto di insieme. Zermelo, il cui lavoro in seguito fu perfezionato da **Abraham Fraenkel** (1891-1965), voleva così dotare la teoria degli insiemi di assiomi chiari per poter chiarire le proprietà di un insieme e cosa si intende con esso. Egli distingueva gli insiemi tra coerenti ed incoerenti e inoltre considerava solo quelle classi che non avrebbero generato contraddizioni, come la classe nulla, la classe finita e l'insieme dei numeri interi, escludendo però la classe complementare poiché infatti se si è sicuri di *x* non è detto che si abbia anche la certezza di *non-x*. Questi sono alcuni assiomi che i due svilupparono:

1. Assioma di estensionalità: Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

2. Assioma dell'insieme vuoto: Esiste un insieme privo di elementi: l'insieme vuoto

3. Assioma della coppia: Se x, y sono insiemi, allora lo è anche {x,y}

La teoria di Zermelo-Fraenkel eliminò i paradossi sulla teoria degli insiemi, ma non placò la ricerca dei matematici e il loro interesse riguardo ai fondamenti, poiché ormai il vero problema era quello riguardo alla coerenza della disciplina, che Zermelo e Fraenkel non avevano risolto.

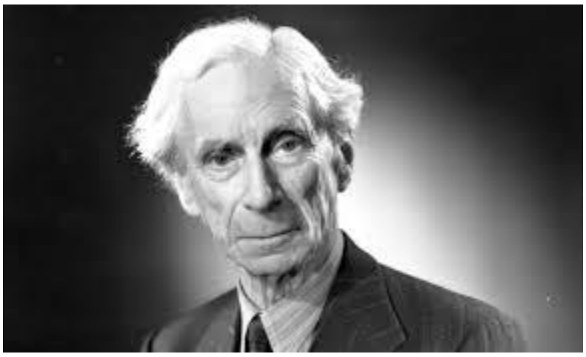
[4] Grundgesetze der arithmetik (I principi dell'aritmetica, 1893), Gottlob Frege

Anche lo stesso **Hilbert**, come abbiamo già visto in precedenza, nei *Grundlagen der geometrie* fornì un nuovo sistema di assiomi per la geometria euclidea. Egli introdusse dei concetti primitivi ovvero *punto*, *linea* e *piano;* inoltre definì tre relazioni binarie primitive: *contiene, stare in mezzo* e *congruenza.* La cosa più importante però è che sostituì ai cinque assiomi e i cinque postulati di Euclide 21 nuovi assiomi, divisi in tre classi. Otto erano i cosiddetti assiomi di appartenenza, quattro erano di ordinamento, sei di congruenza e due di continuità. Aggiunse infine un assioma di parallelismo per definire l'unicità della parallela ad una retta.

Tutta questa ricerca all'interno della matematica, nel XX secolo si sviluppò seguendo in particolare tre correnti di pensiero: il logicismo, l'intuizionismo e il formalismo.

LOGICISMO

Il logicismo tentò di conformare la matematica, assieme ai suoi concetti e teoremi, alle regole della logica poiché secondo i logicisti la matematica si fonda e deriva dalla logica. Uno degli esponenti di questa idea fu Gottlob Frege, di cui abbiamo già trattato in precedenza, ma i veri fondatori di essa sono **Bertrand Russell** (1872-1970), l'autore dell'omonimo paradosso, e **Alfred Whitehead** (1861-1947). Essi si concentrarono inizialmente solo sulla logica e sui suoi assiomi da cui poi si sarebbero dovuti dedurre teoremi da poter usare successivamente. Inoltre svilupparono una serie di simboli atti a descrivere ed enunciare i passaggi logici.


Bertrand Russell (1872-1970)

La loro teoria, chiamata "teoria dei tipi", ha come scopo l'evitare i paradossi che nascono dal fatto che una collezione di oggetti contiene un membro che può essere definito solo in termini della collezione. I due matematici aggirarono il problema affermando che *"tutto ciò che chiama in causa tutti i membri della collezione non deve essere un membro della collezione"*[5]; così essi ritenevano che una funzione logica non può avere tra i suoi argomenti qualcosa che è definito nei termini della funzione. Russell e Whitehead, come suggerisce il nome della loro teoria, distinsero i vari tipi delle classi di enunciati. Così facendo però la teoria matematica diventa oltremodo complessa poiché, ad esempio, la definizione di uguaglianza di un enunciato P, deve essere verificata per tutti i tipi di P, perciò ci sono infinite relazioni di uguaglianza, una per ogni diverso tipo. Un esempio di tipo è un numero irrazionale, che è di tipo superiore ad un numero razionale che a sua volta è superiore ad un numero naturale.

[5] Principia Mathematica, 1910, Bertrand Russell e Alfred Whitehead

Essi provarono a semplificare la loro teoria ma ricevettero molte critiche sotto diversi punti di vista. Russell, Whitehead e tutto il logicismo in generale, ricevettero l'accusa infatti di togliere contenuto alla matematica e di conferirle solamente una forma, che è una peculiarità della logica, ovvero di limitare una disciplina che comunque continuava ad essere usata per spiegare fenomeni naturali come l'elettromagnetismo o l'acustica; poi, gli assiomi usati vennero considerati arbitrari, non dimostrati, ma su di essi era fondata la teoria dei tipi di Russell e Whitehead. In più essa appare incompleta e poco chiara in molti dei suoi aspetti e sembra ridurre la matematica ad una scienza formale deduttiva. Nonostante questo il logicismo portò ad una assiomatizzazione della logica e ad una sua scrittura in simboli, facendole fare notevoli passi in avanti.

INTUIZIONISMO

L'intuizionismo considera ogni oggetto matematico come prodotto dell'intuizione della mente umana. Il primo intuizionista è considerato **Leopold Kronecker** (1823-1891), il quale rifiutava la teoria degli insiemi e accettava soltanto le teorie sui numeri interi, perché chiari all'intuizione, ma non i numeri irrazionali e neanche le funzioni continue, né qualunque concetto infinito. Si può comprendere meglio il suo pensiero guardando ciò che chiedeva ironicamente a Lindemann, scopritore dell'irrazionalità di π: *A che serve la bella ricerca su π? Perché studiare simili problemi, dal momento che i numeri irrazionali non esistono?*[6]

Il primo vero intuizionista rilevante fu **Henri Poincarè** (1854-1912). Egli era contro la fondazione assiomatica della matematica poiché per lui la nostra intuizione precede questa struttura e criticò pesantemente il logicismo.

L'affermazione del pensiero intuizionista si ebbe grazie a **Luitzen Brouwer** (1881-1966) secondo cui l'intuizione fondamentale è l'avvenire delle percezioni in successione temporale; diceva infatti: *"La matematica nasce quando l'oggetto della dualità, che risulta dal passare del tempo, viene astratto da tutti gli avvenimenti particolari"*[7]. Per Brouwer il pensare matematico è un processo costruttivo che edifica un universo proprio, indipendente da qualunque altro. Inoltre esso si presenta nella mente umana precedentemente a linguaggio, logica ed esperienza ed è solamente l'intuizione che determina o meno la validità delle idee; la possibilità della ripetizione illimitata, ad esempio dei numeri, che conduce agli insiemi infiniti. Il linguaggio appartiene alle percezioni casuali e serve a comunicare e ad evocare nella mente copie di idee, attraverso simboli e suoni; i pensieri però non si possono tradurre completamente in simboli, sono molto più ricchi così come le idee matematiche rispetto al linguaggio usato per descriverle. Della sfera del linguaggio fa parte la logica ed essa comunica verità che però devono essere sperimentate, non hanno una garanzia propria. Ad ogni modo secondo Brouwer è la logica che poggia sulla matematica, e non viceversa come per i logicisti. Non essendoci dunque principi logici a priori egli

[6] Lindemann, 1928
[7] Matematische annalen, 1925-1926, Luitzen Brouwer

non conferisce alla matematica la facoltà di dedurre conclusioni dagli assiomi e inoltre essa non è costretta a seguire le regole della logica; questa idea elimina i paradossi che derivano proprio dalle contraddizioni logiche delle precedenti teorie.

Inoltre Brouwer riteneva che nel corso della storia si sono applicati troppo liberamente dei principi che però non sono intuitivi, come per esempio il principio del terzo escluso di Aristotele. Difatti questo

Luitzen Brouwer (1881-1966)

Henri Poincarè (1854-1912)

principio non si può applicare agli insiemi infiniti nei quali è impossibile dimostrare per tutti gli elementi la proprietà o la non-proprietà di essi, e dunque secondo gli intuizionisti esiste un terzo stato di cose diverse da A o non-A, che non è possibile verificare negli insiemi infiniti. Così Brouwer non accetta la conclusione per cui se non tutti gli elementi di un insieme infinito soddisfanno una certa proprietà, allora esiste almeno un elemento che non soddisfa quella proprietà sempre per l'impossibilità della verifica di questa conclusione. In questo modo molte dimostrazioni non sono accettate dagli intuizionisti che ritengono giusto usare il principio del terzo escluso solo quando la conclusione può essere raggiunta attraverso un limite finito di passaggi. La matematica intuizionista è anch'essa molto complessa e differisce molto dalle altre correnti che si svilupparono nel XX secolo per la diversità delle idee di partenza.

FORMALISMO

Indubbiamente **David Hilbert** fu il più conosciuto ed illustre formalista. Secondo Hilbert la logica e la matematica procedevano di pari passo con quest'ultima formata da molte discipline fondate a lor volta su degli assiomi i quali anch'essi si basano su principi logici e matematici. In particolare la logica è un linguaggio di segni che traduce i vari enunciati in formule e esprime le dimostrazioni con processi formali.

David Hilbert (1862-1943)

Nella teoria di Hilbert i simboli sono il vero contenuto, la vera essenza della matematica; essi vengono estrapolati dal contesto e dal loro significato in esso e ne sono dotati di uno proprio che non prescinde da niente. I simboli che egli usa sono ad esempio “e”, “o”, “negazione”, “esiste”… e tramite essi si enunciano le diverse formule.

Con questo metodo le dimostrazioni matematiche diventano una successione di passaggi e deduzioni necessarie, implicate mano a mano dalle diverse formule, che portano a conclusioni a loro volta necessarie. Per cui, una proposizione viene considerata vera da Hilbert, solo nel caso in cui sia la conseguenza di una successione di altre proposizioni, dedotte correttamente tramite assiomi e regole di deduzione.

Dato però che la matematica è formata da diversi ambiti, ci deve essere un sistema formale diverso per ognuno di essi, ciascuno con la propria logica, i propri assiomi, teoremi, regole di deduzione… e bisogna sviluppare singolarmente ogni diverso sistema. Egli, come dice lui stesso nell’*Entscheidungsproblem* (problema della decisione,1928), voleva creare un sistema che fosse non contradditorio e completo, ovvero dimostrabile in ogni ambito e perciò cercò di formulare una teoria, denominata metamatematica, la quale spiegasse l’aritmetica, fondamento di tutte le altre teorie, attraverso un linguaggio strettamente formale. Questa metamatematica utilizzava un numero finito di simboli con i quali avrebbe dovuto autodefinirsi e autoconvalidarsi. In essa Hilbert non usò principi controversi, come la dimostrazione per assurdo, ma solamente procedimenti diretti, chiamati costruttivi, che non passavano attraverso la negazione del principio da dimostrare.

La teoria formalista fu molto importante per lo sviluppo tecnologico e informatico del secolo a partire dalla macchina di Turing (MdT), una macchina ideale pensata nel 1936 dal matematico inglese Alan Turing (1912-1954), consistente in: A) un nastro infinito in entrambe le direzioni, diviso in caselle ciascuna delle quali può contenere il simbolo 0 oppure il simbolo 1. Il nastro rappresenta la memoria della macchina; B) una testina che può leggere il simbolo, 0 oppure 1, contenuto in una casella e scrivere un simbolo in una casella, e può muoversi lungo il nastro, una casella per volta. Essa svolge operazioni di calcolo logico, tramite dei procedimenti fissati e dei simboli, elaborando dei risultati.

Modello della macchina di Turing

Da questa idea si giunse nel 1950 agli elaboratori elettronici e nel 1956 ai primi studi sulle intelligenze artificiali, macchine che simulano e tentano di eguagliare il comportamento umano, fino ad arrivare allo sviluppo di Siri, lanciato nel 2010 da Apple, che potremmo dire essere un esempio odierno molto comune di intelligenza artificiale.

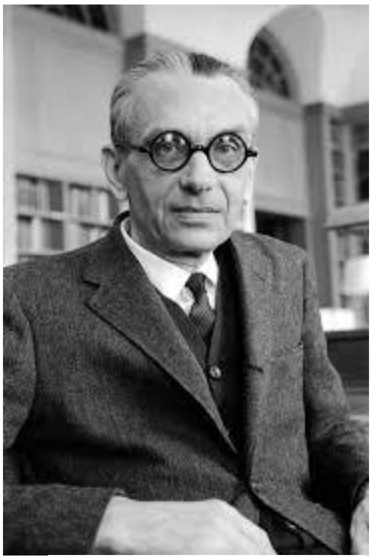
IL PROGRAMMA DI HILBERT

Nel 1920 Hilbert dichiarò pubblicamente il suo impegno per un programma di lavoro avente lo scopo di provare la consistenza (non contraddittorietà) e completezza (ogni affermazione dimostrabile) dell'aritmetica facendo uso solo di un sistema logico-formale; senza necessità di intuizione e riferimenti esterni alla teoria.

Hilbert nella sua ricerca inizialmente dimostrò la coerenza delle geometrie non euclidee, in riferimento a quella euclidea, usando i modelli di Poincarè e Reimann. In seguito in riferimento all'aritmetica mostrò la coerenza della stessa geometria euclidea, usando i metodi della geometria analitica.

Ora, come già accennato precedentemente, restava solo da dimostrare la coerenza dell'aritmetica in quanto è la disciplina su cui si basa tutta la matematica, senza però potersi riferire a nessun'altra teoria essendo appunto l'aritmetica la base di tutte le altre. Questo ultimo punto del programma si manifestò di soluzione assai ardua.

I TEOREMI DI INCOMPLETEZZA DI GODEL



Kurt Godel (1906-1978)

Il movimento assiomatico, iniziato e sviluppato soprattutto da Hilbert, che riteneva di essere sul punto di concludere il programma dichiarato nel '20, subì un colpo mortale con i due teoremi di incompletezza di **Kurt Godel** (1906-1978), logico austriaco naturalizzato statunitense, pubblicati nel 1931. Considerato per importanza, nella storia della logica, alla stregua di Aristotele, dapprima Godel dimostrò il teorema di completezza, il quale affermava che ***una proposizione è vera se e solo se è dimostrabile***. Così se in un sistema di assiomi e regole valide, partendo da quegli stessi assiomi, ogni proposizione può essere dimostrata vera rispetto a quel sistema, allora il sistema è detto completo.

In seguito però dimostrò i suoi due teoremi di incompletezza. Il primo afferma che

ogni teoria matematica, di complessità almeno pari all'aritmetica, contiene almeno una proposizione indecidibile, ovvero che non può essere né dimostrata né confutata.

Il secondo invece afferma che

in ogni teoria matematica T, di complessità almeno pari all'aritmetica, non è possibile dimostrare la coerenza di T all'interno di T.

La grave conseguenza di questi due teoremi è che neanche l'aritmetica, una teoria elementare, può essere completa. Per cui un sistema di assiomi dipende sempre da un altro, il quale a sua volta è sorretto da un altro sistema e così via, senza poter mai giungere ad una teoria ultima che si certifica da sola e certifica tutte le altre.

I matematici del tempo furono bloccati da questi teoremi che mostrarono l'impossibilità di tutti i tentativi di spiegare logicamente i fondamenti della matematica, attraverso la creazione di un sistema assiomatico, e furono causa di sconforto per il fatto di non riuscire a conferire alla matematica una propria consistenza autonoma come si desiderava.

In realtà Hilbert credeva ancora di poter arrivare al suo scopo infatti scrisse che *"non ci sono limiti alla comprensione matematica… in matematica non ci sono ignorabimus (non sapremo, ndr)"*[8]. Egli poneva grande fiducia nel sapere e nell'intelligenza umana e questo lo spinse a continuare la sua ricerca, senza però riuscire mai a giungere a ciò che si era prefissato.

Quindi tutti i tentativi dei primi anni del XX secolo risultarono fallimentari e lasciarono aperti i problemi sulla dimostrazione della coerenza delle varie teorie e della matematica stessa, e sui suoi fondamenti.

UNA NUOVA CONSAPEVOLEZZA

Dopo i teoremi di Godel, un'altra conquista rilevante della ricerca scientifico-matematica, durante il XX secolo, fu la comprensione dello strettissimo legame fra la realtà fisica e la più spinta astrazione matematica.
Le rivoluzionarie teorie della fisica, in particolare la **teoria della relatività di Albert Einstein** e la **teoria dei quanti di Max Plank,** hanno costretto a forgiare nuovi strumenti, concetti e metodi della matematica per interpretare, descrivere e sviluppare le nuove concezioni del mondo fisico. Concetti, strumenti e metodi più raffinati e astratti di tutti quelli studiati in precedenza.

Ciò ha mostrato che la realtà ha in sé un livello altissimo di astrazione, che la matematica deve inseguire e imparare a descrivere e trattare. Cioè in un certo senso possiamo dire che è la realtà ad essere più astratta della matematica; e se quest'ultima vuole continuare ad essere il linguaggio descrittivo della realtà, deve innalzare il suo livello di astrazione.

[8] Conferenza tenutasi al congresso internazionale a Bologna, 1928

CONCLUSIONE

Così dopo 2500 anni dai suoi inizi in Grecia, la matematica è tornata alle sue origini; da una parte una riflessione approfondita sulla natura degli enti matematici e sulla logica del pensiero; dall'altra una valorizzazione dell'astrazione, vista dagli antichi Greci come necessità specifica della conoscenza e del ragionamento matematico e ora riscoperta necessaria per descrivere e interpretare la nuova complessità che il mondo fisico ha mostrato.

Del resto, anche il legame molto stretto tra l'astrazione e la realtà fisica che ci circonda, fu colto già nell'antichità da Archimede con le sue famose leggi della meccanica e dei fluidi e con il suo metodo meccanico per la dimostrazione di teoremi.

Hermann Weyl (matematico e filosofo tedesco 1885-1955) scrisse:

La questione dei fondamenti ultimi e del significato ultimo della matematica rimane aperta; noi non sappiamo in quale direzione troverà la sua soluzione finale e neppure se ci si possa aspettare una risposta definitiva e obiettiva.
La matematizzazione può ben essere un'attività creativa dell'uomo, come il linguaggio o la musica, di originalità primaria, le cui decisioni storiche sfuggono a una completa razionalizzazione oggettiva.[9]

[9] *Obituary Notices of fellows of the Royal Society*, IV; H Weyl, 1944