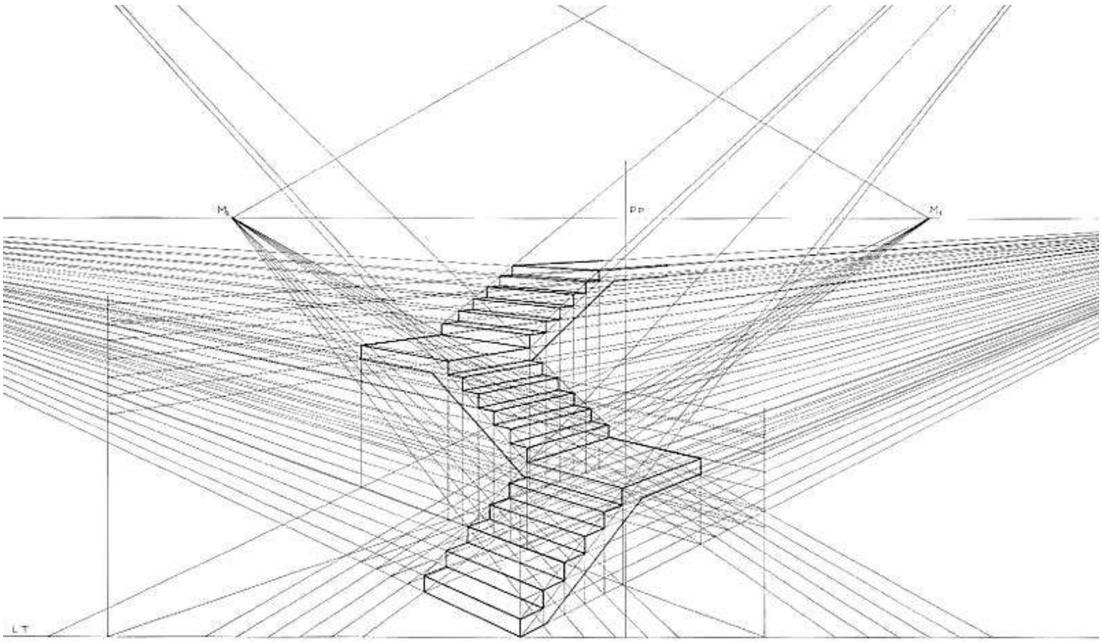
Prospettiva e geometria proiettiva

universi paralleli che si incontrano



Maria Ossola

Liceo classico Alexis Carrel-

Classe 5° sez.c

Esame di stato a. s. 2015-2016

Sommario:

Introduzione

Nel 1400 l'artista e architetto fiorentino Filippo Brunelleschi ebbe un'intuizione che rivoluzionò il modo di rappresentare lo spazio nelle opere d'arte. Brunelleschi osservò che le linee parallele che si vedono nella realtà, come le pareti di un edificio o i bordi di una strada dritta, all'occhio dell'uomo sembrano incontrarsi in un punto; in contrasto con la proprietà geometrica delle rette parallele. Quest'osservazione costituì l'idea centrale della tecnica pittorica ideata da Filippo Brunelleshi e teorizzata da Leon Battista Alberti che consente di rappresentare lo spazio tridimensionale su un piano bidimensionale, ossia il quadro. Questa tecnica prese il nome di prospettiva geometrica.

Nel 1600 quest'innovazione suscitò l'interesse dei matematici, tra cui Girard Desargues, i quali, partendo dall'osservazione dei quadri rinascimentali e dell'uso della tecnica sulla prospettiva geometrica decisero di iniziare una riflessione approfondita in campo matematico. Furono proprio queste riflessioni che aprirono una nuova prospettiva matematica che ben presto divenne un capitolo di geometria a sé: la geometria proiettiva. Le caratteristiche innovative di tale capitolo furono principalmente due: l'aggiunta agli enti euclidei di nuovi enti "elementari", come punti e rette, all'infinito, qualificati come "impropri" e la ridefinizione delle rette parallele. L'applicazione della neonata geometria analitica a tali enti, ad opera di August Ferdinand Möbius permise poi nel XVIII secolo di studiare con i metodi rigorosi dell'algebra ciò che avviene all'infinito, ovvero ai confini dello spazio euclideo.

Prospettiva

Gli artisti hanno sempre avuto l'intuizione di rappresentare lo spazio in maniera prospettica per rendere la tridimensionalità della realtà su un piano a due dimensioni. Filippo Brunelleschi[1] ebbe il merito di sistematizzare questa intuizione che fu poi teorizzata da Leon Battista Alberti[2].

Il periodo in cui matura questa rivoluzione artistica è chiamato Umanesimo per la centralità attribuita all'uomo nella realtà. Questa concezione ha conseguenze anche sull'arte al punto che l'uomo diventa la misura della costruzione spaziale, realizzata a partire dal suo punto di vista.

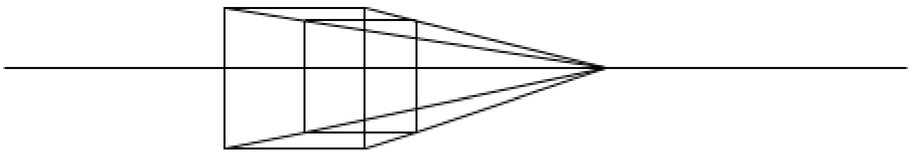
A differenza del periodo precedente, il gotico, in cui emergeva un'enumerazione dell'infinita realtà, nel 1400 la realtà infinita può essere misurata e quindi racchiusa e rappresentata in modo finito. La prospettiva geometrica permette proprio di rappresentare l'oggetto dell'opera secondo precise regole matematiche che permettono di costruire lo spazio in funzione dello sguardo dell'osservatore.

La prospettiva è una tecnica di disegno che utilizza linee e punti di fuga per determinare come variano le dimensioni apparenti degli oggetti rispetto ad un preciso punto geometrico di visuale. Brunelleschi considerò il dipinto come una finestra tra l'osservatore e ciò che vede, e osservò che tutte le linee parallele che percorrono lo spazio perpendicolarmente alla finestra davano l'impressione di convergere in un punto di fuga centrale rispetto all'occhio dell'osservatore. Inoltre si rese conto che quelle linee rispettavano delle leggi geometriche a cui era possibile ricondurre anche tutti gli oggetti rappresentati nel dipinto, da qui l'aggettivo "geometrica" a questo tipo di prospettiva.

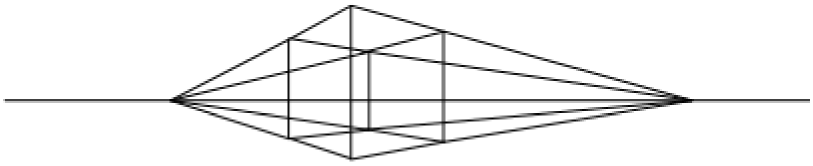
Per costruire un'immagine in prospettiva geometrica le linee che nello spazio reale sono parallele vengono fatte convergere al punto di fuga. Le linee parallele, ora convergenti, sono denominate linee prospettiche e il punto di fuga è situato sulla linea dell'orizzonte: una linea virtuale che dipende dalla posizione dell'osservatore.

[1] Filippo Brunelleschi è stato un architetto e pittore rinascimentale. Visse a Firenze dal 1377 al 1446. Fu l'inventore della tecnica della prospettiva lineare centrica. Tra le sue opere architettoniche più note si trova la cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze.

[2] Leon Battista Alberti è stato architetto, matematico, linguista e filosofo. Nacque a Genova nel 1404 e morì a Roma nel 1472. Fu una figura poliedrica del Rinascimento particolarmente interessato alla ricerca delle regole che guidavano il lavoro degli artisti.

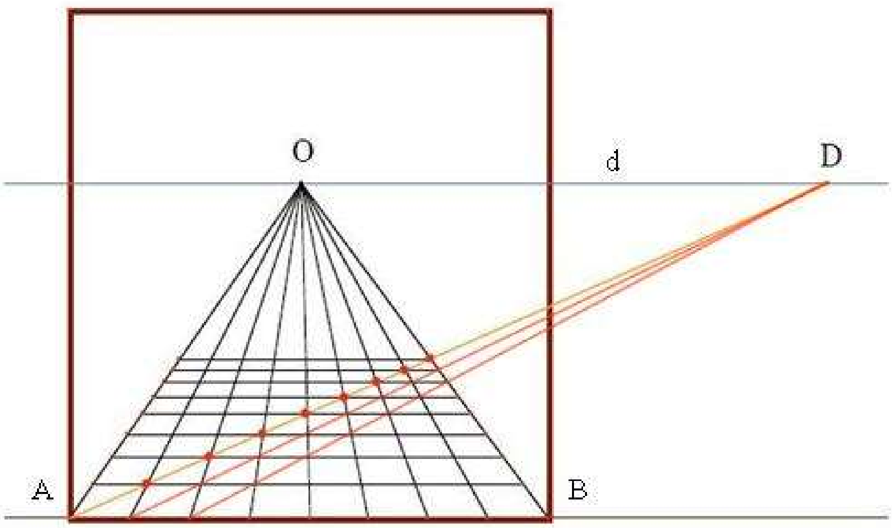


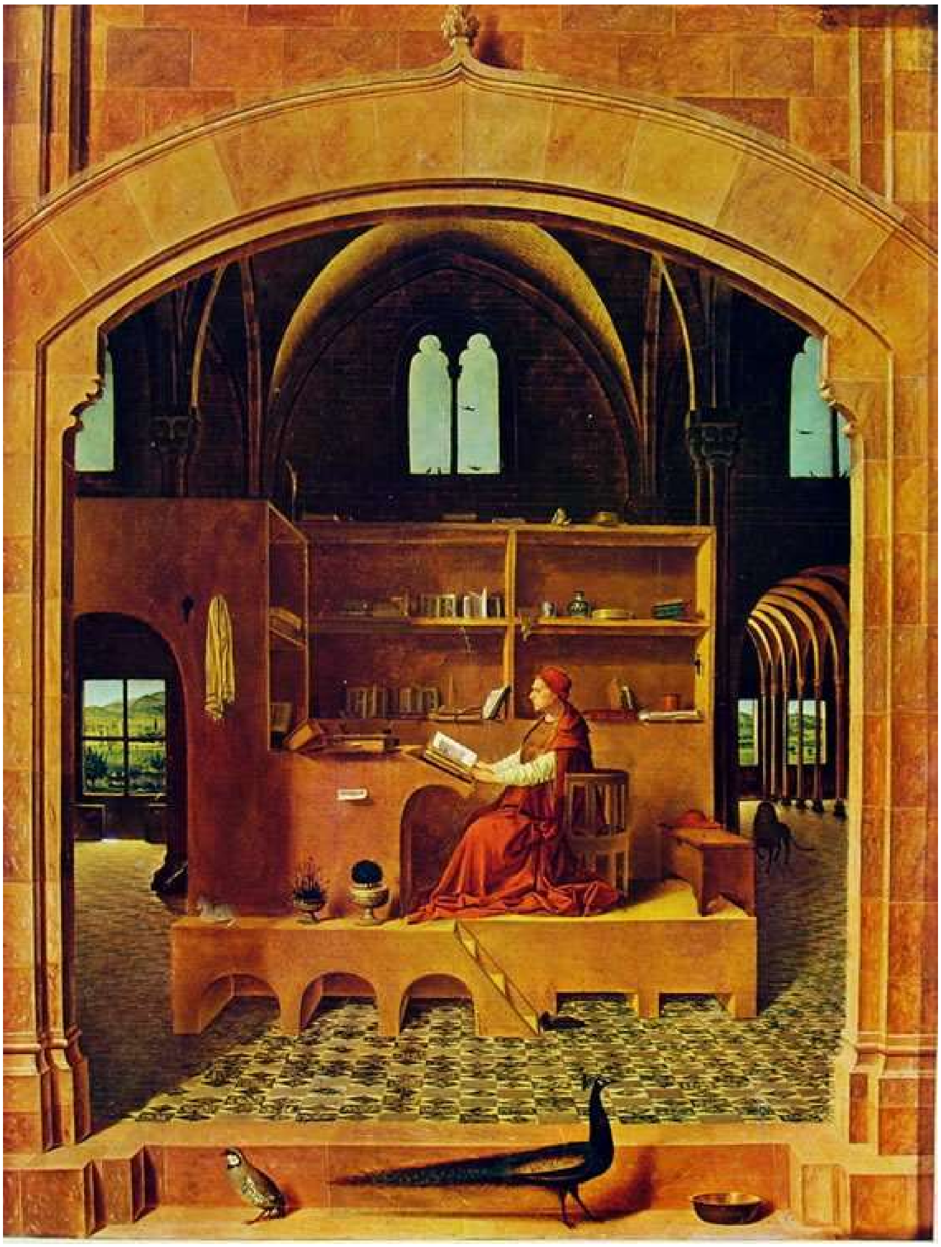
Prospett



Prospett

Le linee prospettiche, o di profondità, possono essere considerate come una piramide di cui il piano ideale è la base e il punto di fuga è il vertice. Delle linee di profondità la mediana è perpendicolare al piano ideale. Per creare una griglia in cui inserire gli oggetti che devono essere rappresentati si tracciano delle linee parallele al piano ideale, le sezioni di piano ottenute dall'intersezioni di queste linee con le linee prospettiche sono chiamate intercisioni.





Antonello da Messina, San Girolamo nello studio, 1474-1475 , olio su tavola (45,7x36,2 cm), National Gallery di Londra

L'opera di Antonello da Messina in figura rappresenta un esempio di applicazione della prospettiva geometrica. Antonello da Messina è un pittore siciliano vissuto tra il 1430 e il 1479 che risente nei suoi lavori di una forte influenza degli artisti fiamminghi. Le caratteristiche principali dell'arte fiamminga sono la grande cura per i dettagli, spesso simbolici, e l'attenzione all'uso della luce.
L'artista costruisce una cornice al dipinto come fosse una finestra che si apre sullo studio di san Gerolamo, un padre della Chiesa. La realizzazione di questo elemento è un espediente

artistico per creare un distacco tra l'osservatore e lo spazio rappresentato in modo da distinguere i due elementi.

La prospettiva geometrica è precisamente applicata: le linee prospettiche convergono nella figura del santo conducendo l'attenzione dell'osservatore su di lui e sul libro che ha tra le mani.

Riprendendo l'uso fiammingo la luce rappresentata nel dipinto proviene da diverse fonti di luce: nell'arco centrale i raggi luminosi seguono le linee prospettiche, nelle parti laterali dell'opera la luce proviene dalle finestre sullo sfondo. Il pavimento segue rigorosamente le regole della prospettiva e rispecchia le differenze di luce e ombra per le diverse fonti di illuminazione.

Si può osservare una grande attenzione ai dettagli che sono realizzati, anch'essi in prospettiva, con estrema precisione, nonostante le ridotte dimensioni dell'opera. Lo si può notare ad esempio nel castello che si intravede dalla finestra sullo sfondo della stanza a sinistra.

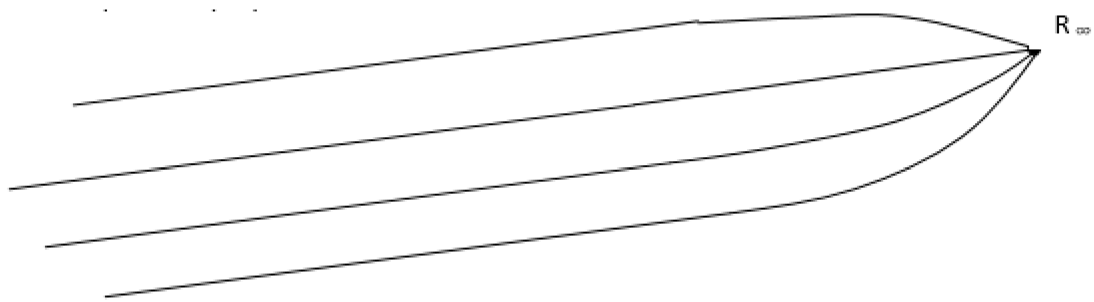
Bartolomeo di Giovanni Corradini (Fra Carnevale), Annunciazione, 1460, tempera su tavola (87,6x62,5 cm), National Gallery di Washington

Anche l'opera di Bartolomeo di Giovanni Corradini mostra una costruzione spaziale che segue rigorosamente le regole della prospettiva geometrica. Le linee che definiscono gli edifici sui lati del quadro sono linee prospettiche che convergono nel punto di fuga; ugualmente si comportano le linee tracciate per il disegno nel pavimento. I diversi colonnati sono rappresentati dal punto di vista dell'osservatore che si trova di fronte al quadro. Una tale rappresentazione dà l'idea dello spazio e conferisce profondità alla scena in cui le figure della Madonna e dell'Angelo occupano il primo piano.

Geometria proiettiva

Dunque l'idea centrale della prospettiva geometrica è l'incontro di linee parallele nel punto di fuga per cui si definisce una corrispondenza biunivoca tra un fascio di rette parallele e il punto di fuga situato sulla linea dell'orizzonte a cui convergono. Fu proprio l'osservazione di queste opere che sollecitò i matematici fino al punto di cercare di rendere rigorosa questa intuizione.
Come accennato, il primo che affrontò i problemi legati alla prospettiva fu Girard Desargues[3], il suo testo dedicato ai problemi proiettivi fu pubblicato nel 1639. Desargues fondò un nuovo modo di considerare la geometria euclidea, estendendo all'infinito i suoi elementi primitivi, come punti, rette e piani.

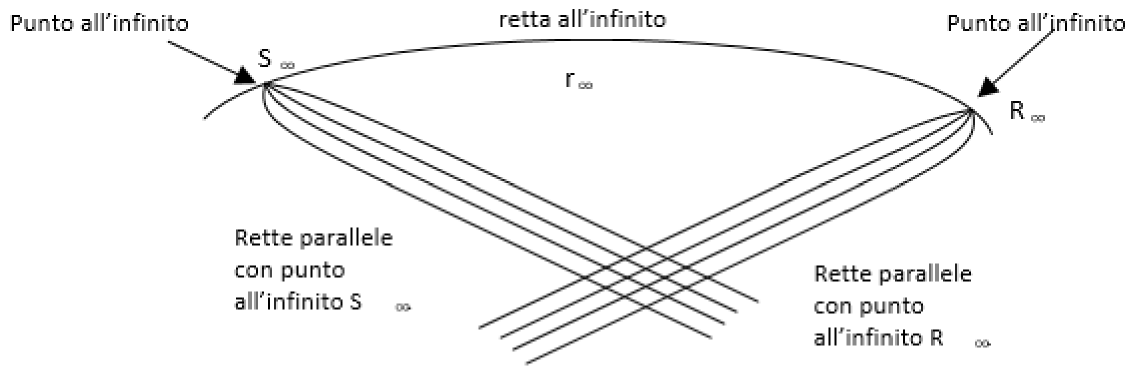
Punto di partenza dei suoi studi fu il fatto che un fascio di rette parallele si incontrano all'infinito in un punto che denominò punto improprio o punto all'infinito. La proprietà di questo punto è quella di indicare la direzione delle rette; infatti rette parallele tra loro hanno lo stesso punto improprio poiché hanno tutte la stessa direzione.
Dunque un fascio di rette parallele, fascio improprio, ha un unico punto improprio, comune a tutte le sue rette, che si indica con $\{R\infty\}$. Se data una retta r considero $r \cup \{R\infty\}$ tale insieme è detto retta proiettiva: ovvero la retta euclidea completata con il suo punto improprio.



fascio improprio

[3] Girard Desargues è stato un matematico francese. Visse a Lione dal 1591 al 1661. È considerato uno dei fondatori della geometria proiettiva.

L'insieme di tutti i punti impropri forma un retta che è definita retta impropria o retta all'infinito: r_∞ . Questa retta a sua volta aggiunta al piano euclideo forma con esso un piano proiettivo che, dato se chiamiamo Π il piano euclideo, possiamo indicare con $\Pi \cup r_\infty$.



Questi concetti basilari della geometria proiettiva permettono di ridefinire alcuni concetti della geometria euclidea riguardanti le rette. Innanzitutto nella geometria euclidea si distinguono due tipi di fasci di rette: fascio proprio e fascio improprio. Il primo è l'insieme di tutte le rette passanti per un punto al finito, mentre un fascio improprio di rette è l'insieme di tutte le rette parallele a una retta data. Questa distinzione non è più necessaria nel piano proiettivo dove anche un fascio improprio è definito come l'insieme delle rette passanti per un punto che però si trova all'infinito; quindi si possono unire le due definizioni dicendo che un fascio di rette nel piano proiettivo è l'insieme di tutte le rette passanti per un punto.

Coordinate omogenee

Per poter rappresentare algebricamente gli elementi geometrici nel piano proiettivo si è dovuto attendere il 1800 quando il matematico tedesco August Ferdinand Möbius [4] introdusse un sistema di coordinate che permettesse di rappresentare tutti i punti del piano proiettivo, sia propri sia impropri.

Il lavoro di Mobius fu reso possibile grazie alle recenti scoperte riguardanti la neonata geometria analitica. Si basò, infatti, sulle innovazioni della geometria cartesiana che permette di rappresentare algebricamente gli enti geometrici su un grafico. Nel 1837 rese pubblica la sua idea che consisteva nell'introdurre una terza coordinata rispetto alle due del piano cartesiano. Con questa scelta ogni punto del piano proiettivo è associato ad una terna di coordinate, dette coordinate omogenee, che si indicano con (x_0,x_1,x_2). La corrispondenza

[4] August Ferdinand Möbius è stato un matematico e astronomo tedesco. Nacque a Bad Kösen nel 1790 e morì a Lipsia nel 1868. È noto per diverse scoperte in campo matematico tra cui le coordinate omogenee.

tra coordinate cartesiane e omogenee è fissata dalle seguenti uguaglianze: $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$ con $x_0 \neq 0$. Inoltre ogni terna di coordinate omogenee è univocamente determinata a meno di una costante per cui può essere scritta come (k, kx, ky) con $k \neq 0$. Vi è un'unica eccezione: non esiste nessun punto con coordinate (0,0,0); l'origine infatti ha coordinate (1,0,0).

Il valore aggiunto dalla terza coordinata x_0 sta nel fatto nuovo di poter dare un volto algebrico agli elementi all'infinito. Infatti tutte le terno con $x_0 = 0$ (ad eccezione di 0,0,0) individuano punti impropri, ossia punti che si trovano all'infinito.

Grazie alla relazione che intercorre tra coordinate cartesiane e coordinate omogenee è possibile ridefinire le equazioni degli enti geometrici.

Prendiamo in considerazione le rette e le coniche.

<u>Equazioni in coordinate cartesiane</u>

retta: $ax + by + c = 0$

conica: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

circonferenza: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

parabola: $y = ax^2 + bx + c$ ovvero $x = ay^2 + by + c$

<u>Equazioni in coordinate omogenee</u>

retta: $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$

conica: $ax_1{}^2 + bx_1x_2 + cx_2{}^2 + dx_1x_0 + ex_2x_0 + fx_0{}^2 = 0$

circonferenza: $x_1{}^2 + x_2{}^2 + ax_1x_0 + bx_2x_0 + cx_0{}^2 = 0$

ellisse: $b^2x_1{}^2 + a^2x_2{}^2 - a^2b^2x_0{}^2 = 0$

iperbole: $b^2x_1{}^2 - a^2x_2{}^2 - a^2b^2x_0{}^2 = 0$

parabola: $x_2x_0 = ax_1{}^2 + bx_1x_0 + cx_0{}^2$ ovvero $x_1x_0 = ax_2{}^2 + bx_2 + cx_0$

Ridefinire in questo modo le equazioni permette di studiare con i metodi sicuri dell'algebra ciò che accade all'infinito, dove anche l'intuizione fatica a spingersi.

Per esempio la retta r di equazione esplicita $y = \frac{2}{3}x + 1$ ha direzione fissata dal suo coefficiente angolare $\frac{2}{3}$.

Nella forma implicita o generale l'equazione di r diventa $2x - 3y + 3 = 0$.

Se si introducono le coordinate omogenee, ossia si passa dal piano cartesiano al piano proiettivo, l'equazione diventa: $2x_1 - 3x_2 + 3x_0 = 0$. Dato che $x_0 = 0$ rappresenta tutti i punti impropri del piano, dunque l'equazione della retta impropria r_∞, è possibile mettere a sistema le equazioni di r e di r_∞ e, come accade nell'ordinaria geometria analitica, ricavare il loro punto d'intersezione, che però ora si trova all'infinito; si può dunque trovare il punto improprio della retta r.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Come si constata immediatamente la soluzione del sistema non è univoca, ma costituita dalle infinite terne della forma $(0{,}3k, 2k)$. Infatti sostituendo alle coordinate della prima equazione si ottiene $2 \cdot 3k - 3 \cdot 2k + 3 \cdot 0 = 0$, identicamente soddisfatta per qualsiasi valore di k. Il punto improprio della retta r è dunque $R_\infty(0{,}3k, 2k)$.

Se ora si considera una seconda retta s parallela alla r; ad esempio la retta di equazione esplicita $y = \frac{2}{3}x + 5$ che nella forma implicita diventa $2x - 3y + 15 = 0$, si verifica immediatamente che anch'essa passa per $R_\infty(0{,}3k, 2k)$: infatti $2 \cdot 3k - 3 \cdot 2k + 15 \cdot 0 = 0$.

Dunque la terza coordinata permette di individuare il punto improprio di ogni retta; univocamente associato alla sua direzione: m=$\frac{2}{3}$ e $R_\infty(0{,}3k, 2k)$.

Estendendo queste considerazioni alle coniche si giunge a trovare, se esistono, i punti impropri delle coniche.

Anche in questo caso bisogna risolvere un sistema, che però ora è di secondo grado tra l'equazione della conica e l'equazione della retta impropria

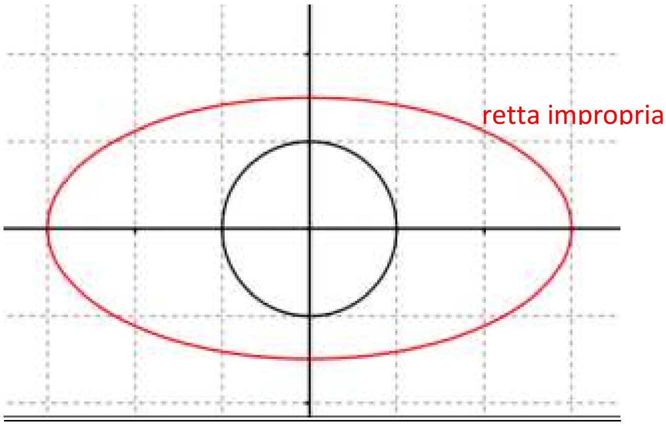
<u>Punti impropri della circonferenza</u>

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 + ax_1x_0 + bx_2x_0 + c{x_0}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Il punto con coordinate (0,0,0) non esiste, quindi la circonferenza non ha punti impropri, cioè non va all'infinito.



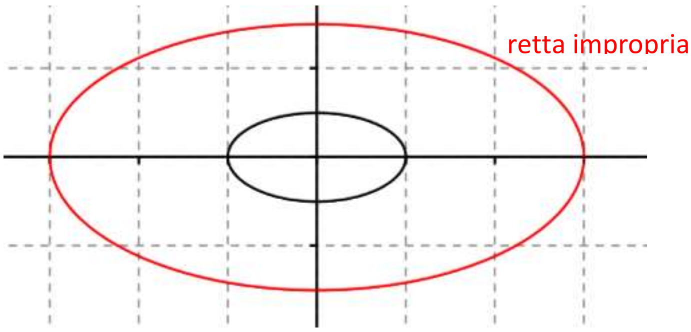
Punti impropri dell'ellisse

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2{x_1}^2 + a^2{x_2}^2 - a^2b^2{x_0}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2{x_1}^2 + a^2{x_2}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi neanche l'ellisse ha punti impropri, cioè non va all'infinito.



Punti impropri dell'iperbole

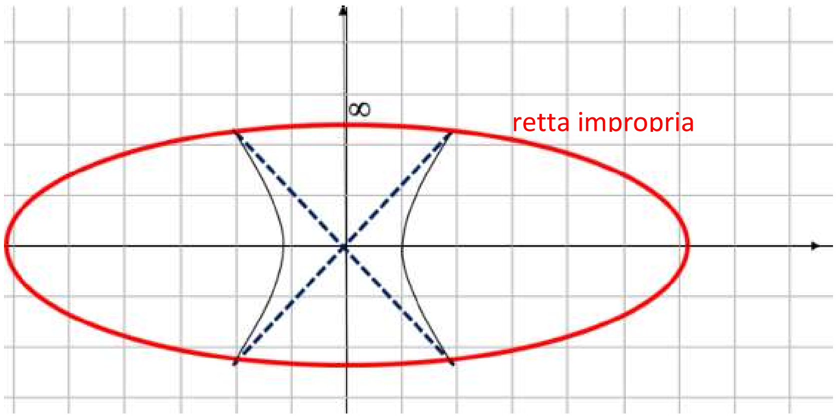
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2{x_1}^2 - a^2{x_2}^2 - a^2b^2{x_0}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2{x_1}^2 - a^2{x_2}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ {x_1}^2 = a^2 \\ {x_2}^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \pm a \\ x_2 = \pm b \end{cases}$$

I punti di intersezione risultano quattro:



$(0, a, b)$

$(0, -a, -b)$

$(0, -a, b)$

$(0, a, -b)$

Considerando, però, che le coordinate omogenee sono legate tra loro da una costante si può notare che i punti $(0, a, b)$ e $(0, -a, -b)$ sono lo stesso punto con $k = -1$; la stessa osservazione può avvenire per i punti $(0, -a, b)$ e $(0, a, -b)$. Quindi ricaviamo che i punti impropri dell'iperbole sono due: $(0, a, b)$ e $(0, a, -b)$. Inoltre si può constatare che questi punti all'infinito indicano esattamente le direzioni degli asintoti dell'iperbole, i quali hanno equazione $y = \pm\frac{a}{b}x$. Si può dunque immaginare che l'iperbole intersechi la retta impropria negli stessi punti di intersezione dei suoi asintoti con la retta all'infinito.

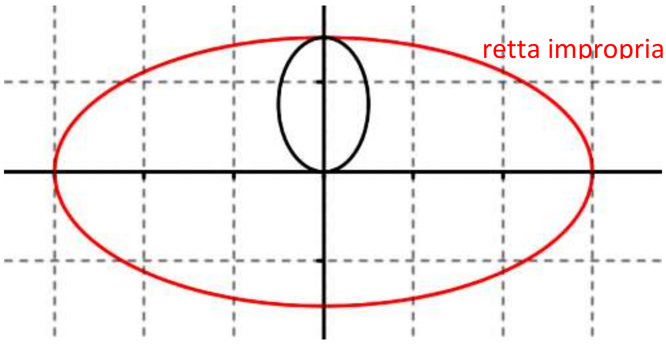
Punti impropri della parabola

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 x_0 = a{x_1}^2 + b x_1 x_0 + c{x_0}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 0 = a{x_1}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Il valore di x_2 può essere fissato liberamente. Si osserva che la parabola ha un punto all'infinito: $(0,0,1)$. Ciò significa che la retta impropria risulta tangente alla parabola, questa caratteristica dimostra il fatto che i rami della parabola tendono a diventare paralleli e quindi si incontrano all'infinito, ovvero all'infinito assumono la stessa direzione.



Si può dunque riassumere che l'ellisse, di cui la circonferenza è un caso particolare, non ha punti all'infinito, la parabola ne ha uno e l'iperbole ha due punti all'infinito.
La possibilità di trovare i punti impropri di una curva risulta fondamentale nella classificazione delle coniche, infatti esiste un'unica equazione in grado di descrivere tutte le coniche partendo dalla quale si possono distinguere le curve in base al numero di punti impropri. Il procedimento per classificare una conica consiste nel tradurre l'equazione in coordinate omogenee e poi intersecare l'equazione così trovata con la retta impropria $x_0 = 0$.

Esempi di classificazione di conica

- $4y^2 + 12y + 9 = x$

Prima si omogenizza l'equazione: $4{x_2}^2 + 12x_2x_0 + 9{x_0}^2 = x_1x_0$.

Poi si risolve il sistema di secondo grado per trovare i punti impropri:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 4{x_2}^2 + 12x_2x_0 + 9{x_0}^2 = x_1x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 4{x_2}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ponendo il valore di x_2 liberamente, si osserva che questa conica possiede un solo punto improprio, di conseguenza essa è una parabola.

- $x^2 + xy + 3y^2 + y - 2 = 0$

Prima si omogenizza l'equazione: ${x_1}^2 + x_1x_2 + 3{x_2}^2 + x_2x_0 + 2{x_0}^2 = 0$.
Poi si risolve il sistema di secondo grado per trovare i punti impropri:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ {x_1}^2 + x_1x_2 + 3{x_2}^2 + x_2x_0 + 2{x_0}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ {x_1}^2 + x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione dell'equazione di secondo grado è $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.
Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Si osserva che la conica non ha punti all'infinito quindi si tratta di un'ellisse.

Per quanto riguarda la classificazione delle coniche l'introduzione delle coordinate omogenee risulta fondamentale in quanto fornisce un'ulteriore spiegazione sulla loro natura. Le coniche, infatti, sono così chiamate perché hanno tutte la stessa origine ossia si ottengono dalla sezione di un cono con un piano, nonostante questo aspetto comune le coniche presentano notevoli differenze senza, apparentemente, una giustificazione. Con la geometria proiettiva, invece, è possibile descrivere tutte le coniche in maniera unitaria utilizzando l'equazione generale ${ax_1}^2 + bx_1x_2 + {cx_2}^2 + dx_1x_0 + ex_2x_0 + {fx_0}^2 = 0$ e distinguerle andando a cercare, come precedentemente spiegato, se esistono e quanti sono i loro punti impropri.

Un'ulteriore passaggio per la classificazione delle coniche consiste nello stabilire se esse siano degeneri o meno. Una conica è definita degenere se la sua equazione di secondo grado è scomponibile nel prodotto di equazioni di primo grado e dunque il grafico in una coppia di rette.

Conclusione

Dunque, per questo breve e circoscritto capitolo della conoscenza che riguarda la scoperta della prospettiva, si constata una dinamica generale: a partire dalle osservazioni di fatti concreti, sotto gli occhi di tutti, benché emersi solo alla coscienza di persone particolarmente acute e sensibili, si è innescata una ricerca di nuove forme in grado di rappresentare e descrivere la novità di sguardo conquistata.
Tale ricerca iniziata in ambito artistico e perciò svolta con gli strumenti e i metodi propri dell'arte, ha coinvolto e contagiato anche un ambito lontano dall'arte, come quello matematico.
I protagonisti di tale ambito hanno proseguito la ricerca con gli strumenti e metodi propri della matematica, giungendo a svelare ciò che né ai loro occhi né agli occhi degli artisti era mai apparso: le caratteristiche geometriche dell'infinito. Grazie all'algebra tali caratteristiche sono diventate nominabili e studiabili, chiarendo e approfondendo la conoscenza di ciò che era già noto al finito e solo intuito all'infinito.

Bibliografia:

- Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Biblioteca Einaudi, 1999
- Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, ISEDI, 1976
- R. Courant e H. Robbins, *Che cos'è la matematica,* Universale scientifica Boringhieri, 1978
- D. Hilbert e S. Cohn-Vossen, *Geometria intuitiva,* Universale scientifica Boringhieri, 1978
- AA.VV. , *Lezioni di geometria proiettiva,* Dipartimento di matematica dell'università statale di Milano, 2006
- G.C.Argan, *Storia dell'arte italiana*, 1981, Sansoni
- H.Honour, J.Fleming, *Storia universale dell'arte*, 1982, Laterza