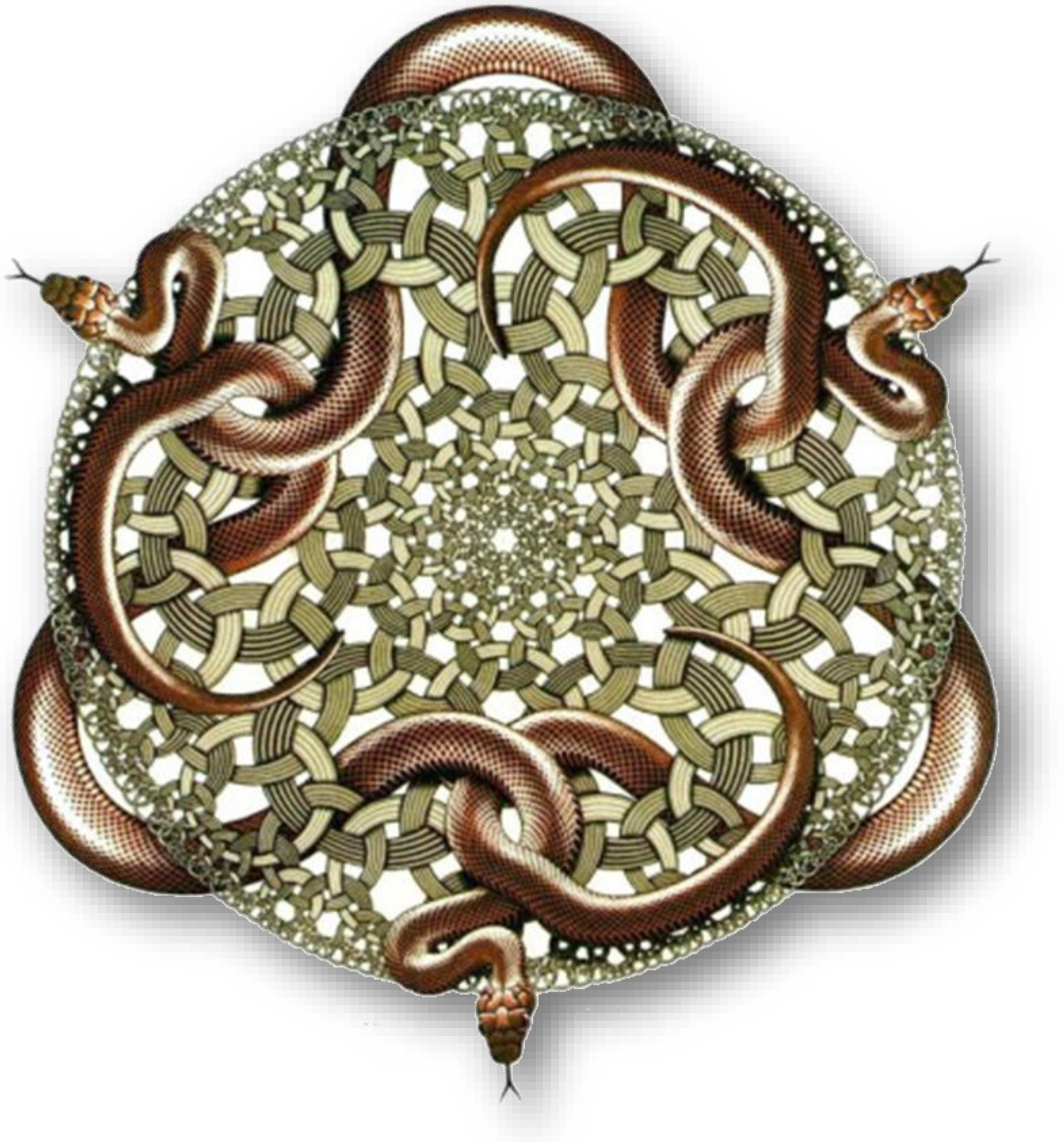
L'infinito di M.C.Escher



Margherita Confalonieri

Liceo Classico Alexis Carrel

Classe V sez. c

Esame di stato a. s. 2017-2018

Introduzione

La figura di M.C.Escher permette a due mondi apparentemente diversi di incontrarsi: quello dell'arte e quello della matematica. Le sue opere sono uniche in quanto non possiamo inserirle in nessuna corrente artistica; in esse però si possono ritrovare aspetti del pensiero e della cultura della sua tradizione come la tecnica che utilizza, la xilografia. Questa infatti venne introdotta proprio nei Paesi Bassi verso la metà del quindicesimo secolo e riflette quindi le sue radici culturali.

Egli si inoltra nei misteri della geometria e di altre scienze per rappresentare ciò che la riproduzione della realtà non gli permetterebbe di fare, come mondi sconosciuti, metamorfosi… Una tematica da cui era particolarmente affascinato, che ha interrogato tutta l'umanità fin dall'antichità, è quella dell'infinito, che è ciò che c'è di più astratto nella nostra mente.

Nel corso del diciottesimo e del diciannovesimo secolo erano state elaborate quelle che sono dette geometrie non euclidee poiché non hanno come quinto postulato quello della normale geometria euclidea, bensì il suo contrario.

Escher guardando le illustrazioni di un libro di matematica viene a conoscenza di una di queste geometrie, quella di Poincarè, che gli offre la possibilità di fare ciò che la normale concezione di spazio non gli permetteva di fare: il rappresentare l'infinito in un piano definito.

La vita di Escher

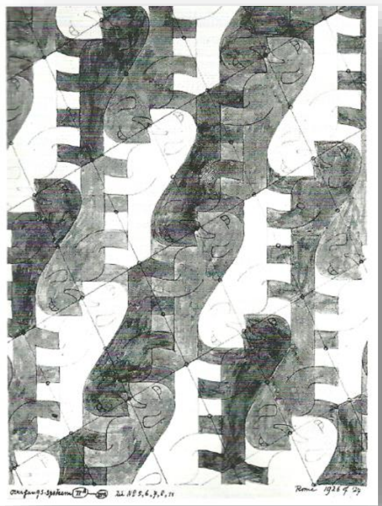
M.C.Escher nacque a Leeuwarden nel 1898. A tredici anni cominciò a frequentare la scuola superiore di Arnheim dove la famiglia si era trasferita. Egli non era propriamente un allievo modello: dovette ripetere l'anno scolastico per due volte e non terminò gli studi. Non arrivò ad avere buoni voti neanche in educazione artistica nonostante avesse un talento superiore alla media. Il padre riconoscendo la sua dote lo iscrisse alla facoltà di architettura ma lo studio di questa materia non durò molto tempo. Nel giro di pochi giorni risultò chiaro che l'attitudine del giovane si manifestava meglio nelle arti decorative e non nell'architettura. Escher cambiò indirizzo e divenne allievo di de Mesquita che non lo riteneva però abbastanza originale e vivace per essere artista.

Mano con sfera riflettente, litografia, 1935

Nonostante questo giudizio però i due si mantennero in contatto fino alla morte, per opera dei nazisti nel 1944, dell'insegnante. Nella primavera del 1922 escher fece un viaggio in italia dove conobbe jetta umiker, anche lei artista, che divenne sua moglie nel 1924. I due si trasferirono a Roma, dove vissero fino al 1935 con i figli. L'artista era affascinato dal paesaggio dell'italia meridionale, che era per lui fonte di ispirazione. Quando nel 1935, dopo che il fascismo si era affermato nel paese, decise di lasciare l'italia; si trasferì prima in Svizzera, troppo grigia per la sua sensibilità, e poi tornò in Belgio allo scoppio della seconda guerra mondiale. Nel mezzo aveva viaggiato a lungo. La meta più significativa per lui fu Alhambra di Granada dove studiò approfonditamente gli ornamenti moreschi che ornavano pareti e pavimenti. Nel gennaio del 1941 escher si spostò a Baarn, in Olanda. In questo luogo, dove i giorni di sole e il caldo sono considerati un dono, maturò la sua produzione più ricca. Quando i figli crebbero egli torno a viaggiare e a disegnare; dopo un periodo di malattia nel 1969 lavorò alla sua ultima grande composizione, *serpenti. N*el 1972 morì a Laren, in Olanda del nord.

Il primo approccio alla matematica

Quando Escher lasciò Roma per tornare in Belgio e poi in Olanda si compì un mutamento interiore: ciò che lo circondava, la realtà esterna, non lo ispiravano più; risultava assai più attratto da composizioni che possono essere espresse e descritte solo in modo matematico. Il suo interesse però non era quello di rappresentare qualcosa di astratto, poiché le astrazioni lo infastidivano e in esse ricercava una possibilità di legame con qualcosa di più concreto. *Ciascun elemento- sia che rappresenti un essere vivente- di solito un animale, talvolta una pianta- o un oggetto di uso quotidiano, deve poter essere riconosciuto dall'osservatore.* Escher stesso aveva commentato in questo modo la sua arte mostrando come anche il più assoluto surrealismo rimanesse ancorato alla realtà; Gli schizzi dei paesaggi e le scene cittadine dell'Italia meridionale, pur non essendo il motivo principale per i suoi quadri, fungevano da sfondo per le sue composizioni. L'idea iniziale di Escher fu quella di coprire tutta la superficie ripetendo un tema realizzato con l'accostamento di copie dello stesso massello. Ispirandosi ai mosaici dell'Alhambra ideò gradualmente nuovi metodi di suddivisione periodica del piano. Non essendo esperto di geometria intraprese sforzi colossali per dare una scansione ritmica alla superficie; ma non riuscì a portarla a termine. Il suo primo esperimento, che non lo soddisfò per nulla, consisteva in una serie di animali immaginari e malriusciti disegnati a matita e colorati con acquerello



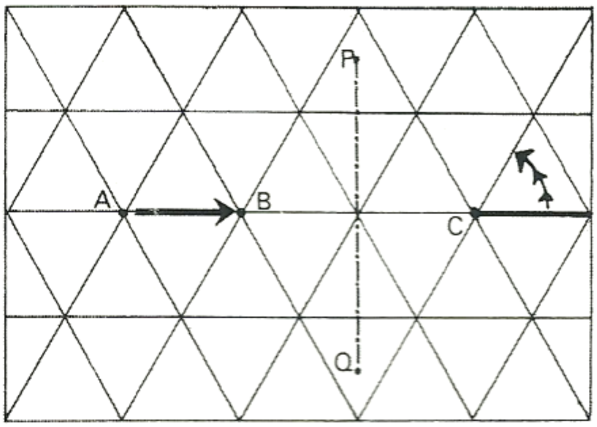
Prima prova della divisione regolare del piano, con animali immaginari (particolare), matita e acquerello, 1926

Per i primi dieci anni la divisione del piano era stata per lui un tabù fino alla seconda visita all'Alhambra. Nuovamente rimase affascinato dalle ricchissime possibilità che offrivano queste complesse composizioni. Insieme alla moglie, anche lei artista, si occupò di riprodurre numerose decorazioni che una volta tornato in patria iniziò ad analizzare. Studiò dettagliatamente illustrazioni di libri di matematica riguardanti queste tematiche e elaborò un sistema molto pratico.

Il sistema

Si consideri un motivo ornamentale in cui l'intera superficie è ricoperta di triangoli equilateri.
Per verificare quali spostamenti di questo fregio lo facciano coincidere con se stesso si prepari un duplicato e lo si ricalchi su carta lucida per poi sovrapporlo sul motivo originario, in modo che i triangoli coincidano.

I possibili spostamenti sono:

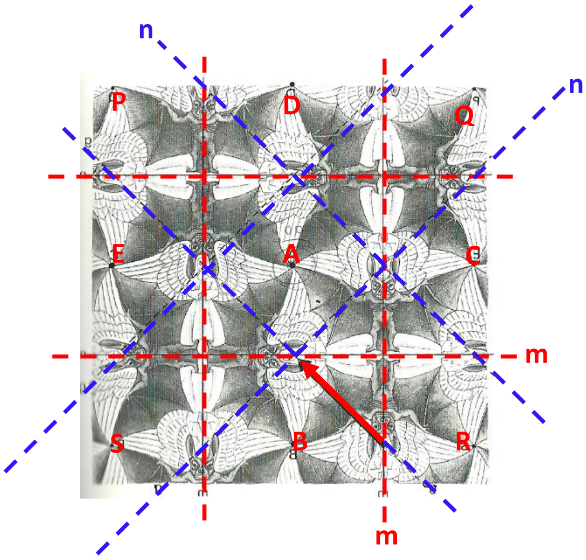


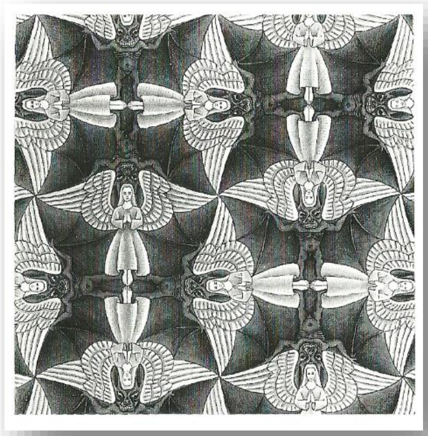
La traslazione: si sposti il duplicato da A a B; esso ricoprirà il motivo che sta al di sotto.

La rotazione: si ruoti il duplicato di 60° intorno al punto C.

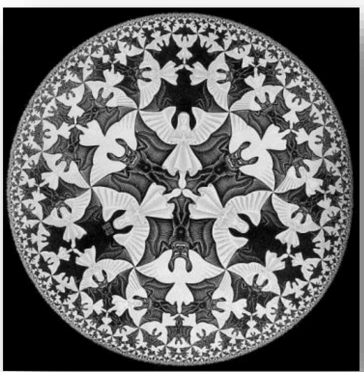
Il movimento simmetrico: si tracci sulla figura originale e sul duplicato la linea tratteggiata PQ, sollevando il duplicato, lo si faccia ruotare in modo che le linee tratteggiate coincidano.

Esempio: angeli e diavoli





In questa opera è presente una divisione regolare del piano con quadruplice simmetria. Dovunque quattro punte d’ala si incontrino è possibile far ruotare di 90° il motivo in modo da riportarlo a coincidere con se stesso ma non tutti i punti sono uguali; solamente P,Q, R, S al contrario di B, C, D, E risultano perfettamente sovrapponibili per traslazione. È possibile inoltre tracciare rette orizzontali e verticali per mezzo dell’asse mediano dei corpi degli angeli e dei diavoli; tali rette sono assi di simmetria, contrassegnati dalla lettera m. Su ciascuna si riflette l’intera tassellatura in modo da coincidere con se stessa. Infine ci sono gli assi di simmetria di scorrimento con un angolo di 45° con gli assi di simmetria (indicati con la lettera n): le rette che attraversano le teste degli angeli. Per osservare la presenza di essi è necessario compiere non solo una simmetria ma anche una traslazione lungo la diagonale.

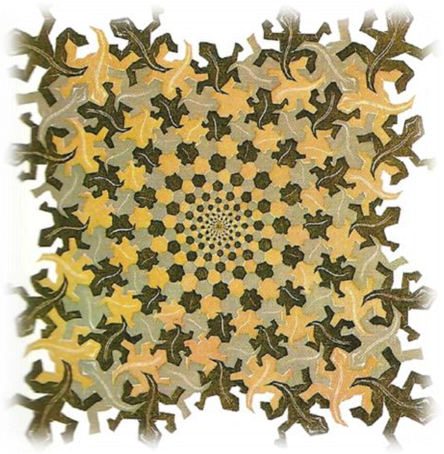


Limite del cerchio IV, silografia, 1960

Escher utilizzò proprio questa tassellatura per realizzare *limite del cerchio IV*, la sua rappresentazione dell’infinito meglio riuscita. A differenza di angeli e diavoli in cui sono alternati due e quattro assi, nel limite del cerchio se ne incontrano quattro e tre in un punto, come per esempio dove i piedi dei tre angeli si toccano.

Rappresentare l'infinito

Dopo aver sviluppato la tecnica della tassellatura del piano, la principale tematica per la quale cercò di utilizzarla fu quella dell'infinito. Egli fece numerosi tentativi sfruttando forme e spazi sempre nuovi.



Sviluppo II, silografia, 1939

Inizialmente egli raffigurò come in *Sviluppo II* una composizione le cui figure erano sottoposte a una costante riduzione radiale che parte dai bordi per giungere al punto centrale, nel quale cade il limite tra l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo.

Anche questa configurazione però non rimane più che un frammento, poichè la si potrebbe estendere a piacere, aggiungendovi lucertole sempre più grandi. L'unico modo per eliminare questo carattere frammentario è concepire un infinito inserito in una logica linea di confine: avvicinarsi all'opera a rovescio, cioè dai tasselli più grandi ai più piccoli.

Per raggiungere il suo scopo Escher ebbe bisogno di strutture del piano completamente nuove; strutture che permettessero di rappresentare qualcosa di illimitato in una superficie limitata.

Le geometrie non euclidee

La geometria euclidea fu la prima vera teoria scientifica mai formulata, la prima a coincidere con l'ideale aristotelico di scienza. Essa si costruisce su concetti, proposizioni e dimostrazioni per mezzo di un metodo assiomatico-deduttivo; alla base è retta da cinque postulati e cinque assiomi:

Assiomi

a1 cose uguali ad una stessa sono uguali tra loro;
a2 uguali aggiunti ad uguali sono uguali;
a3 uguali sottratti ad uguali sono uguali;
a4 cose che coincidono tra loro sono uguali;
a5 il tutto è maggiore della parte.

Postulati

p1 da qualsiasi punto si può condurre una retta ad ogni altro punto;
p2 ogni retta terminata si può prolungare continuamente per diritto;
p3 con ogni centro e ogni distanza si può descrivere un cerchio;
p4 tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;
p5 se una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due retti, le due rette, prolungate per diritto, si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti. (Se $\alpha + \beta < 2$ retti allora esiste P).

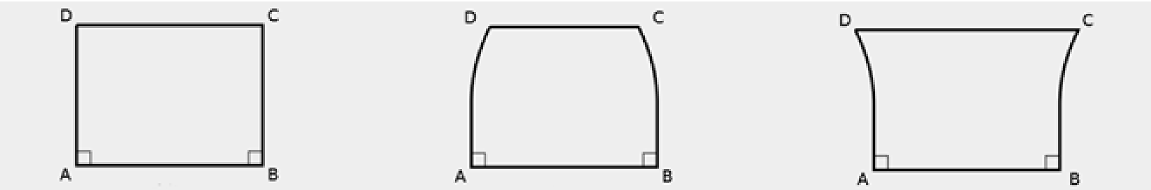
Come criterio per stabilire la veridicità di queste proposizioni non dimostrabili Euclide scelse l'evidenza; esse dovevano dunque avere un contenuto proprio, disegnabile, visibile, intuibile immediatamente condivisibile. Non tutti gli assiomi e postulati erano però così evidenti: tra gli assiomi il quinto, il tutto è maggiore della parte, era discutibile ma non in contesti finiti o anche infiniti potenziali. Il più problematico fu il postulato cinque, che afferma, in una versione semplificata, che *per un punto esterno ad una retta data passa una e una sola parallela*. Infatti non è possibile essere certi di ciò che accade estendendo il piano all'infinito. Anche lo stesso Euclide si rese conto della non evidenza di questo postulato e perciò cercò di dimostrare il maggior numero di teoremi possibile senza utilizzarlo, arrivando fino al teorema n°27 riguardante i criteri di parallelismo.

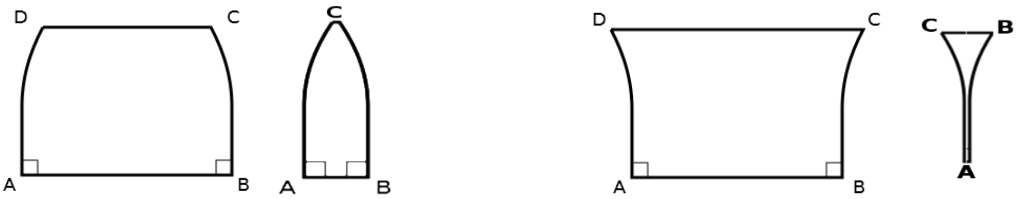
Questa prima parte della geometria fu chiamata in seguito **Assoluta** per distinguerla dalla seconda parte che invece non poteva prescindere dal quinto postulato, che fu ritenuta la vera e propria **geometria euclidea.**

Nel corso di tutta la storia seguente molti intellettuali tentarono di far fronte al problema del V Postulato, senza successo. Nel 1697 Girolamo Saccheri, padre gesuita, matematico e filosofo, pubblicò la *Logica demostrativa*, un trattato di logica. In esso descrisse anche come avrebbe agito al fine di dimostrare il quinto postulato applicando una sorta di dimostrazione per assurdo. Escogitò questo metodo mosso dalla convinzione che sarebbe stato più facile trovare una contraddizione piuttosto che una conferma. Intitolò la sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* cioè Euclide liberato da ogni difetto, ovvero il tentativo di dimostrare gli stessi primi principi della geometria universale.

Alla base vi pose i cinque assiomi e i primi quattro postulati; quindi sostituì al quinto postulato la sua negazione nelle due forme possibili, cioè che non ci fosse neppure una parallela o che ce ne fossero più di una.

Successivamente prese in considerazione un quadrilatero birettangolo isoscele e vi applicò le tre ipotesi: quella euclidea e le due negazioni.





Quindi analizzò i teoremi sulla somma degli angoli nel triangolo dimostrando che nell’ipotesi dell’angolo ottuso la somma degli angoli interni fosse più di 180°, mentre nel secondo caso risultasse meno. Senza immaginare le conseguenze di questo ragionamento Saccheri concluse la propria dimostrazione scrivendo riguardo al primo caso che *«L’ipotesi dell’angolo ottuso è completamente falsa perché distrugge se stessa»* mentre riguardo al secondo che *«L’ipotesi dell’angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta»*.

Analizzando queste proposizioni si intuì che in realtà non erano vere e proprie contraddizioni; tutti i teoremi risultavano infatti veri, benché controintuitivi. Con l’obiettivo di dimostrare la verità della geometria euclidea, Saccheri costruì, inconsapevolmente, il primo esempio di geometria non euclidea.

Nel secolo successivo infatti il matematico russo Nikolaj Ivanovič Lobačevskij riconsiderò e rielaborò l’opera di Saccheri sulla base dell’ipotesi dell’angolo acuto (la seconda forma di negazione del postulato 5) e pubblicò nel 1829 *Nuovi principi della geometria,* in cui propose una teoria logicamente del tutto paragonabile a quella di Euclide, ma fondata su un diverso postulato 5:

“per un punto esterno ad una retta passano più di una parallela”;

affermazione decisamente controintuitiva.

Questa nuova geometria, detta iperbolica, fece molto scalpore e tutta la comunità scientifica s'interrogò su come verificare con certezza la sua coerenza e non contraddittorietà.

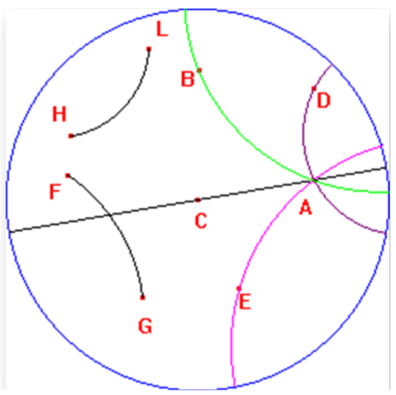
Il modello di Poincarè

Fu Henrì Poincarè, matematico, fisico e filosofo francese che visse nella seconda metà del diciannovesimo secolo che propose un modello sintattico di geometria euclidea per la geometria non euclidea iperbolica.

Il ragionamento che lo mosse fu il seguente: se riusciamo a interpretare i concetti primitivi della geometria iperbolica con altrettanti concetti (primitivi o non) della geometria euclidea e poi a tradurre assiomi e teoremi della g. iperbolica in equivalenti enunciati della geometria euclidea e, infine, a dimostrare che gli enunciati euclidei corrispondenti a quelli iperbolici sono tutti teoremi validi della g. euclidea, avremo provato la non contraddittorietà della nuova geometria relativamente alla euclidea. Ovvero che se la g. euclidea non è contraddittoria – cosa da tutti riconosciuta - allora non lo è nemmeno la g. iperbolica.

Il modello proposto da Poincarè fu il seguente:

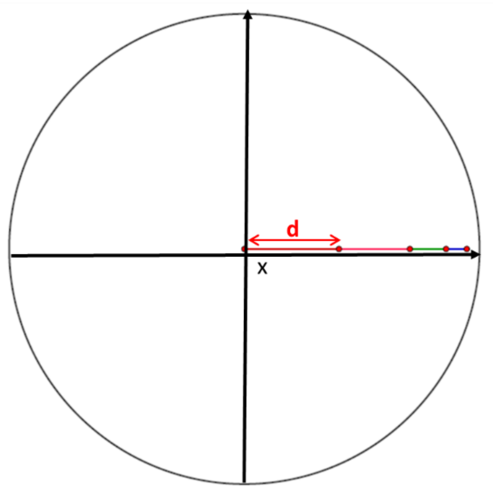
Fissato nel piano euclideo un cerchio γ, dicesi:



punto: ogni punto interno a tale cerchio.

Retta: ogni diametro, privato degli estremi, oppure ogni arco di circonferenza, interno al cerchio e con estremi sullo stesso, ma sempre privato degli estremi, ed ortogonale alla circonferenza che lo delimita (due cerchi si dicono ortogonali se le loro tangenti nei punti di intersezione sono perpendicolari).

Piano: l'insieme di tutti i punti interni a γ



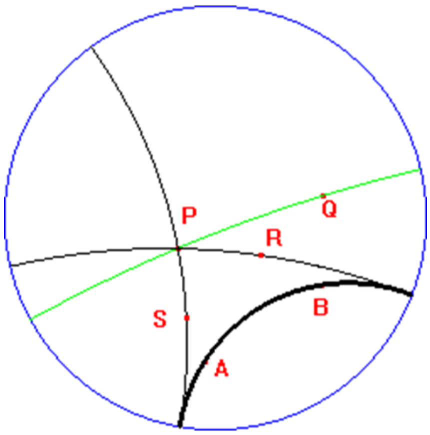
Modificò poi il concetto di *distanza* facendo in modo che esso soddisfacesse il seguente limite

$$\lim_{x \to r} d(x) = 0$$

Ciò significa che dal punto di vista metrico la distanza tra due punti non è costante, in tutto il piano, ma dipende dalla posizione dei due punti; diminuisce progressivamente, tendendo a 0, man mano i due punti si allontanano dal centro. Secondo questa metrica, la distanza colorata di blu nella figura è uguale a quella colorata di verde, di rosa e di rosso. I confini della circonferenza rappresentano il limite all'infinito.

(un ipotetico abitante di questo spazio non avrebbe modo di appurare l'esistenza delle leggi che lo governano e potrebbe perciò muoversi dal centro verso i confini estremi senza mai riuscire a raggiungerli, avendo perciò l'impressione di una dimensione infinita)

<u>Postulati</u>

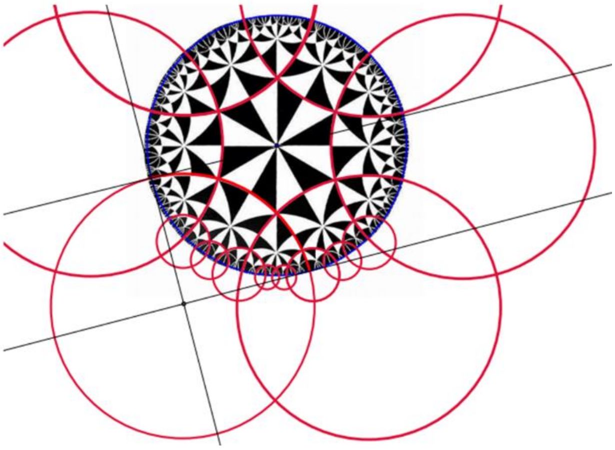


Si può verificare che nel modello di Poncarè valgono i primi quattro postulati euclidei, ma non il quinto.

Nell'immagine: una retta AB, le due parallele passanti per un punto P (PS e PR) ed un'altra retta, PQ, non secante AB: anche quest'ultima potrebbe essere considerata parallela ad AB (infatti non la interseca), ma si preferisce riservare questo nome solo alle due rette "estreme", PS e PR. Le rette dello stesso tipo di PQ si dicono ultraparallele.

Applicazione in Escher del modello geometrico di Poincarè

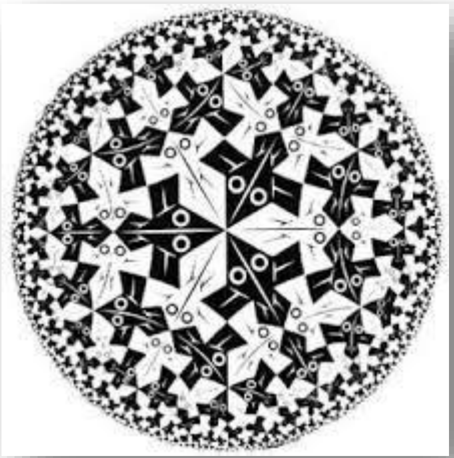
Questo modello si rivelò perfetto per ciò che Escher voleva rappresentare: l'infinito in uno spazio



limitato, perché «il limite dell'infinitamente numeroso e dell'infinitamente piccolo viene raggiunto sul bordo circolare».

Egli aveva visto questo concetto rappresentato in un libro del professor Coexter e sulla base di questa illustrazione, pervenne a un suo personale scherma costruttivo.

Così nel 1958 apparve *limite del cerchio I* definito da Escher come un tentativo non completamente riuscito:



Limite del cerchio I, silografia, 1958

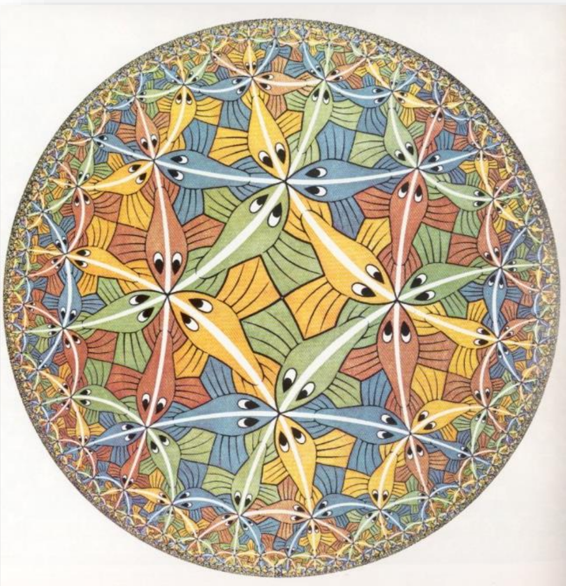
Lo scheletro di questa composizione consiste- a parte le tre rette che passano per il centro- in archi di circonferenza aventi un raggio sempre minore avvicinandosi al margine esterno. Inoltre tutti si tagliano ad angolo retto. La silografia limite del cerchio I, un primo tentativo, presenta imprecisioni di vario tipo. Non solo la forma dei pesci, sviluppatasi da astrazione rettilinee a creature troppo rudimentali, ma anche il loro ordinamento in generale e nel particolare, lasciano a desiderare. Se ne possono individuare tre diverse categorie che sono riconoscibili dal modo in cui gli assi dei corpi dei pesci passano dall'uno all'altro. Esse sono costituite ad alternanza, da coppie di pesci bianchi, che si guardano in faccia reciprocamente e coppie di pesci neri le cui code si toccano. In *ogni gruppo c'è nessuna continuità e nessuna direzione di marcia, come anche nessuna uniformità di colore. (Descrizione dell'opera)*

Limite del cerchio II, silografia, anno sconosciuto

Limite del cerchio II è una composizione quasi sconosciuta. Somiglia a limite del cerchio I, ma al posto dei pesci, ci sono croci.

A dire il vero questa versione avrebbe dovuto essere dipinta sulla parte interna di una mezza sfera. La offrii al Papa in modo che potesse decorare la parte interna della cupola di S. Pietro. Immaginatevi un numero infinito di croci che pendono sulla sua testa! Ma il Papa non volle. (IDEM)

Nel 1959 realizzò Limite del cerchio III, una silografia a cinque colori. Qui la struttura base è una libera variante dell'originale. Oltre ad archi, che si trovano a angolo retto rispetto alla circonferenza del cerchio, così come deve esser, ce ne sono anche alcuni che non lo fanno.



Limite del cerchio III, silografia, 1959

Nella silografia a colori Limite del cerchio III sono state eliminate del tutto le imperfezioni di Limite del cerchio I. si hanno ancora soltanto gruppi di "traffico scorrevole", tutti i pesci che appartengono a un insieme e hanno lo stesso colore e nuotano uno dietro l'altro- testa-coda – da un margine all'altro, lungo un binario circolare. Più si avvicinano al centro, più diventano grossi. Fu necessario usare quattro colori, perché ciascuna fila potesse differenziarsi con chiarezza dall'ambiente circostante. Così come tutte queste file di pesci che salgono verticali da lontananze infinite, come razzi, partendo dalla circonferenza e di nuovo ci ripiombano, non una sola componente raggiunge *mai il confine. Poiché al di là vi è il nulla assoluto. Eppure questo mondo circolare non può sussistere senza il vuoto che lo circonda- non solo per il fatto che un <dentro> presuppone un <fuori>, ma anche poiché gli immateriali punti medi degli archi della circonferenza, che sono la base costruttiva del sistema, sono ordinati in modo strettamente geometrico <nel nulla>. (IDEM)*

Conclusione

Le geometrie non euclidee sono controintuitive perché non rispondono al criterio dell'evidenza, infatti l'uomo ragiona sullo spazio in termini di geometria euclidea. Escher dovette utilizzare una geometria non euclidea proprio perchè ciò che voleva rappresentare, l'infinito, è qualcosa di astratto, che non può essere raggiunto da un occhio euclideo.

Bibliografia

Ernst Bruno, *Lo specchio magico di M.C.ESCHER*, Köln, Taschen, 2015