

Liceo Classico Alexis Carrel
ESAME DI STATO
2014-2015

DALL'IMPLICITO ALL'ESPLICITO

Marta Foieni 5K - 2015

In questo lavoro intendo proporre osservazioni e considerazioni su come un concetto inizialmente negativo e implicito, in un percorso di riflessione e maturazione culturale, linguistica, poetica viene progressivamente compreso ed esplicitato e ~~quindi compreso~~ con una nuova consapevolezza positiva.

PARTE I: GLI INSIEMI INFINITI

L'infinito è stato uno dei concetti più difficili da concepire ed esplicitare nella storia del pensiero umano. Gli uomini hanno osato metterlo a tema con una certa determinazione d'indagine solo nel XVII sec. L'esistenza di grandezze infinite è stata però sempre nota, fin dall'antichità.

EPOCA CLASSICA: IMPLICITEZZA ASSOLUTA

Il termine usato dai Greci per designare l'infinito era ἄπειρον che letteralmente significa *senza limiti* e quindi illimitato. La difficoltà inerente la concezione dell'infinito consisteva perciò nella sua inesauribilità: ciò che è infinito non può mai essere presente nella sua totalità nel nostro pensiero. L'illimitato non può dunque in nessun caso essere riguardato come un tutto completo: ciò che è completo ha una fine e la fine è un elemento limitante. All'infinito, secondo Aristotele, resta perciò indissolubilmente associata un'idea negativa, espressione della sua incompletezza e potenzialità non attuata e non attuabile ed è proprio questa idea negativa che portò al rifiuto di introdurre l'infinito attuale nella Matematica greca.

Zenone nel V secolo a.C. enunciò alcuni paradossi legati all'infinito numero di punti che compongono una retta. La base del successo di Zenone, sta nel fatto che per gli antichi Greci la somma di infiniti non può che essere un infinito; l'idea che tale somma potesse essere finita era fuori dalla portata concettuale del tempo.

EUCLIDE

Euclide negli elementi parla delle grandezze infinite in modo implicito con due postulati che enuncia nel primo dei 13 libri degli *Elementi*, all'inizio cioè della sua geometria:

P4: *“una retta terminata può essere prolungata continuamente per diritto”*

P5: *“due rette che incontrano una terza e con essa formano angoli che da una stessa parte del piano hanno per somma un angolo minore di un piatto, s'incontrano da quella parte”.*

Riguardo al primo occorre notare come Euclide eviti di parlare direttamente della retta come di un'infinità attuale, limitandosi alla prudente idea di segmenti prolungabili “continuamente”, secondo appunto un infinito potenziale.

Riguardo al secondo occorre precisare il significato del termine “postulato”: per Euclide il postulato deve avere una forte componente di verità intuitiva, ovvero di evidenza. Il

postulato 5, benché passato alla storia come il postulato delle parallele, nella sua formulazione originaria non parla di “rette parallele”, perché ciò avrebbe portato a dover descrivere ciò che accade all’infinito e quindi avrebbe sottinteso la considerazione di un’infinità in atto.

Il problema dell’infinito ritorna implicitamente anche nella prima proposizione degli *Elementi*, laddove Euclide si prefigge la costruzione di un triangolo equilatero:
“Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero”

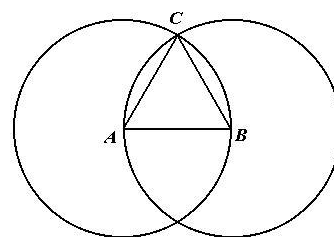
DIMOSTRAZIONE:

1) Sia AB un segmento qualsiasi. Si tracci un cerchio con centro in A e raggio AB. Si tracci poi un altro cerchio con centro in B e raggio BA. Dal punto C, in cui si secano i cerchi, fino ai punti A e B si congiungano le rette CA e CB.

2) E poiché il punto A è il centro del primo cerchio, AC è quindi uguale a AB. Allo stesso modo, poiché il punto B è il centro del secondo cerchio, BC è quindi uguale a AB.

3) entrambe le rette AC e BC sono uguali a AB, e gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro, pertanto anche AC è uguale a BC.

Le tre rette CA, AB, BC sono quindi uguali tra loro. Il triangolo ABC è quindi equilatero, e risulta costruito sulla retta limitata data AB.



In questa proposizione Euclide afferma l’indubitabilità dell’intersezione di due archi di circonferenza in un punto, in questo modo tocca in modo del tutto implicito la continuità delle linee geometriche. La continuità non era affermata da alcuno degli assiomi di Euclide, ma la sua evidenza era forte nel pensiero intuitivo tanto da non richiedere la necessità di una dichiarazione esplicita. Questo tema della continuità è legato a quello dell’infinito, perché ogni segmento è un insieme di infiniti punti.

In epoca greca domina dunque un implicito assoluto e insuperabile sul concetto di infinito, avvertito tanto necessario quanto inconcepibile dal nascente pensiero razionale.

GALILEI: NECESSITÀ DI CHIAREZZA

Il concetto di infinito rimase implicito per secoli. Nel XVII sec. d.C. Galileo Galilei propose nuove e semplici osservazioni che misero in crisi l’assioma 5 di Euclide secondo cui: “*Il tutto è maggiore della parte*” e fecero riemergere la contraddizione sugli insiemi infiniti. Tuttavia non giunse ad alcuna sistemazione teorica chiarificatrice, ma anzi arrivò a respingere gli insiemi infiniti in quanto:

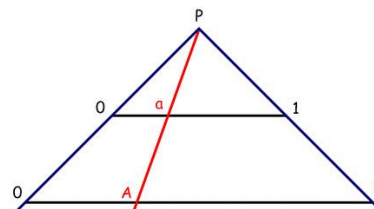
“.. questo darsi un infinito maggior dell’infinito mi par concetto da non poter essere capito in verun modo”¹

¹ Prima giornata de “Discorsi e dimostrazioni matematiche” (Leida 1638)

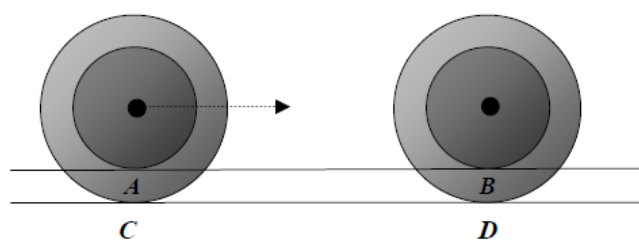
I ragionamenti che hanno portato Galileo a questa conclusione sono essenzialmente i seguenti:

1) Se si considera l'insieme (infinito) dei numeri naturali e il suo sottoinsieme proprio formato dai soli quadrati perfetti, è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca di ogni numero Naturale col suo quadrato; una corrispondenza, perciò che permette di stabilire l'uguale numerosità dei due insiemi, benché uno contenuto nell'altro.

2) I punti di due segmenti possono sempre essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro, e conclude che i due segmenti, benché di lunghezze molto diverse, devono contenere lo stesso n° di punti.



3) Nel paradosso della ruota (attribuito ad Aristotele e ripreso da Galileo), si considerano invece due ruote concentriche e solidali saldate insieme: quando la più grande ruota e percorre un giro completo, anche la più piccola fa lo stesso, ed entrambe percorrono due segmenti di uguale lunghezza l.



Galileo si chiede:

“Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?”²

L'unica via d'uscita è una corrispondenza biunivoca tra la circonferenza piccola e quella grande. Ma questa conclusione, come già quella degli altri paradossi, sembra contraria al senso comune oltre che al principio di Euclide: “il tutto è maggiore della parte”. Galileo conclude dicendo che: *“Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno all'infinito, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente”³.*

L'impasse dei Greci e l'inevitabile implicitezza riguardo agli insiemi infiniti, trova nelle riflessioni di Galileo una nuova e forte sollecitazione verso la ricerca di una chiarezza esplicita. I tempi del pensiero scientifico però non sono ancora maturi per raggiungerla.

BOLZANO E CANTOR: DEFINIZIONE ESPLICITA

Dopo più di un secolo, Bernard **Bolzano** (1781-1848) fu il primo a compiere un passo decisivo. Egli nel “Paradoxien des Unendlichen” osservò che la corrispondenza tra il tutto e una sua parte non valeva tra insiemi finiti, mentre aveva validità tra due insiemi

² Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638)

³ Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze

infiniti. Ad esempio i n° reali compresi tra 0 e 5 possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i n° reali compresi tra 0 e 12, mediante la formula $y=12/5x$.

Finalmente Georg **Cantor** riprese l'osservazione di Bolzano e la utilizzò per dare la definizione di insieme infinito:

“Un insieme è infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria”.

Raggiunta questa chiarezza esplicita furono ripensati gli insiemi finiti, gli unici considerati dagli antichi; ma questa volta la nuova consapevolezza raggiunta sugli infiniti portò a formulare una loro definizione in negativo, in contrasto con quanto successo in passato:

“Sono finiti gli insiemi che **non** possono essere messi in corrispondenza biunivoca con una loro parte propria”.

Il difficile concetto di infinito in atto, considerato inconcepibile dagli antichi, grazie al susseguirsi di osservazioni, paradossi e problemi arriva così, dopo numerosi secoli, ad una definizione esplicita, rigorosa e soddisfacente, cioè in grado di giustificare tutti gli enigmi del passato.

Nuovi concetti chiedevano però di emergere in altrettante definizioni esplicite, volte a chiarire ad esempio se gli infiniti sono tutti uguali tra loro o ne esistono diversi tipi.

PARTE II: L'OMBRA

PERCORSO NELLA DIVINA COMMEDIA

Nella Divina Commedia ricorre 60 volte la parola "ombra". Dante parte dalla concezione comune di ombra come opacità, assenza di luce, quindi con valore negativo, ma, attraverso la sua esperienza, prende consapevolezza del nesso tra l'ombra, quindi la materialità del nostro mondo, e la concezione cristiana di segno. Essa acquisisce quindi progressivamente una inaspettata valenza positiva, dal punto di vista proprio squisitamente gnoseologico. Vorrei proporre un'analisi dei valori semantici di questa parola per evidenziare un percorso che mi pare analogo a quello visto in matematica.

Le occorrenze della parola "ombra" nella Commedia hanno diversi significati: mancanza di luce diretta e quindi opposizione alla luce del sole (o della luna); forma proiettata da qualche corpo; parvenza corporea degli abitanti dei tre regni d'oltretomba; significato legato all'intelletto di Dante; fino al significato di segno della Grazia ricevuta da Dante e dell'esperienza che Dante fa fare a noi del viaggio che lui ha compiuto.

Dante per i significati di ombra prende spunto dagli autori classici, dalla dottrina tomistica e dai testi biblici.

VIRGILIO

Virgilio nell'Eneide usa la parola "umbræ" per indicare le ombre del Tartaro e le anime che lo abitano:

*"...aeternum latrans exsanguis terreat **umbras**"*

(le ombre esangui latrando in eterno)⁴

*"...ad genitorem imas Erebi descendit ad **umbras**"*

(si cala tra le tenebre fonde dell'Erebo per vedere suo padre)⁵

Vorrei notare in particolare che Virgilio conclude l'Eneide con la parola "umbras": *"vitaque cum gemitu fugit indignata sub umbras."* (e la vita in un rantolo fugge adontata fra le ombre)⁶ Al contrario Dante termina l'Inferno, e le altre due cantiche, con la parola "stelle": il poeta in questo modo riprende l'Eneide ma indica quella che ha compreso essere la vera meta dell'uomo, il suo destino. La Sibilla a Enea dice: *"...sed revocare gradum superasque evadere ad auras,/ hoc opus, hic labor est."* (ma tornare sui propri passi e riaffiorar sotto il cielo, questa è l'impresa, questa la fatica)⁷. Questa fatica è stata possibile a Dante perché gli è stata data una strada.

⁴ Eneide libro VI, v.401 (traduzione di Sermoniti)

⁵ Eneide libro VI, v.404

⁶ Eneide libro XII, v.950

⁷ Eneide libro VI, v.128

OMBRA COME ASSENZA: L'INFERNO

Nell'Inferno Dante parte dalla concezione di ombra di Virgilio, connotando quindi la parola col solo significato negativo. Nel canto I "ombra" è contrapposta ad "omo", quindi indica l'assenza del corpo carnale:

"Quando vidi costui nel gran deserto,
«*Miserere di me*», gridai a lui,
«qual che tu sii, od **ombra** od **omo** certo!».
Risposemi: «Non omo, omo già fui,"⁸

L'ombra nell'Inferno significa la mancanza anche di luce sia fisica sia intesa come Bene e Verità. Il poeta la usa ad esempio per indicare nel canto II la sua condizione all'inizio del viaggio:

"«l'anima tua è da viltade offesa;
la qual molte fiata l'omo ingombra
sì che d'onrata impresa lo rivolve,
come falso veder bestia quand' **ombra**."⁹

Poi la utilizza per indicare la condizione dei dannati:

"...ma giù s'abbuia
l' **ombra** di fuor, come la mente è trista."¹⁰

OMBRA COME INDIZIO: IL PURGATORIO

Nel Purgatorio nella maggior parte delle ricorrenze la parola "ombra" è riferita all'ombra fisica del corpo di Dante proiettata dai raggi solari. Le anime del Purgatorio quando vedono quest'ombra si stupiscono perché essa è l'indizio della corporeità di Dante.

"...e io facea con l' **ombra** più rovente
parer la fiamma; e pur a tanto indizio
vidi molt'ombre, andando, poner mente.
Questa fu la cagion che diede inizio
loro a parlar di me; e cominciarsi
a dir: «Colui non par corpo fittizio»;"¹¹

⁸ Inferno, canto I, v.64-67

⁹ Inferno, canto II, v.45-48

¹⁰ Paradiso, canto IX, v.71-72

¹¹ Purgatorio, canto XXVI, v.7-12

Essendo l'indizio della presenza di Dante col corpo nel Purgatorio, l'ombra inizia e diventare il segno della Grazia che Dante ha ricevuto. L'ombra infatti è parte di ciascun uomo e indica la condizione della vita nel mondo. È strettamente legata all'uomo, tanto che dopo la morte l'ombra è ciò che rimane del corpo.

Stazio nel canto XXV spiega che Dio dona all'uomo la virtù razionale: essa è la capacità che lo contraddistingue tra tutte le altre creature, come oggetto della Sua preferenza. Dante la chiama "spirito novo" ed è "memoria, intelligenza e volontade".

Dopo la morte la virtù razionale addensa l'aria circostante creando una forma simile al corpo; l'anima è chiamata "ombra" perché riceve visibilità dal corpo aereo:

“Però che quindi ha poscia sua paruta,
è chiamata **ombra**; e quindi organa poi
ciascun sentire infino a la veduta.
Quindi parliamo e quindi ridiam noi;
quindi facciam le lagrime e ‘ sospiri
che per lo monte aver sentiti puoi.

Secondo che ci affiggoni i disiri
e li altri affetti, l'**ombra** si figura;
e quest'è la cagion di che tu miri».”¹²

Anche da “ombre” le anime soffrono, sentono, amano: l'ombra è quindi strettamente legata ai desideri e agli affetti delle anime, ed è segno della virtù razionale.

Questo possesso delle capacità sensitive da parte dell'anima è in parte preso da Dante dalla dottrina tomistica.

OMBRA COME TRACCIA: IL PARADISO

A questo punto non sorprende che nel Paradiso, accanto al significato base di opacità, “ombra” ne acquisisca uno ben più positivo, affine al concetto cristiano di “segno”. Nel Purgatorio Dante è arrivato a farci notare, anche con la frequente ricorrenza della parola “ombra”, che Dio si è mosso per lui attraverso quel suo corpo: l'ombra è un indizio che indica la strada della Grazia per lui.

L'importanza per l'uomo del corpo Dante la sottolinea nel canto IV del Paradiso, quando dice che l'uomo essendo carne ha bisogno di carne per conoscere:

“Così parlar conviensi al vostro ingegno
però che solo da sensato apprende
ciò che fa poscia d'intelletto degno.
Per questo la Scrittura condiscende
a vostra facultate, e piedi e mano
attribuisce a Dio e altro intende.”¹³

¹² Purgatorio, canto XXV, v.100-108

¹³ Paradiso, canto IV, v.40-45

A questo punto iniziamo a capire che l'ombra legata al corpo è l'**indizio della strada** stabilita per Dante ed è quindi strettamente legata all'idea cristiana di segno, perché è la modalità attraverso cui Dio ha deciso di fargli intraprendere questo viaggio di conoscenza.

Nel Paradiso Dante, fino alla diretta contemplazione di Dio, fa esperienza della verità necessariamente attraverso gli occhi di Beatrice, che chiama "vivi suggelli":

"E sì come secondo raggio suole
uscir del primo e risalire in suso,
pur come pelegrin che tornar vuole,
così de l'atto suo, per li occhi infuso
ne l'immagine mia, il mio si fece,
e fissi li occhi al sole oltre nostr'uso."¹⁴

La strada per l'uomo verso la Verità passa quindi necessariamente attraverso il segno. Dio stesso non disprezza la carne, anzi con l'incarnazione si fa simile all'uomo in ogni aspetto, compreso corpo e quindi ombra. Nel canto XIV Salomone spiega a Dante che con la resurrezione vivremo col corpo in eterno, perché esso è legato alla consistenza dell'uomo.

Aggiungo un'ulteriore precisazione sul legame tra la strada per la verità e la carnalità. Nel canto III e nel VI Dante usa due espressioni simili:
"ombra delle sacre bende" e "ombra delle sacre penne".

La prima indica il velo da suora e la seconda si riferisce all'impero: gli uomini, in questo caso gli imperatori, sono strumenti della provvidenza divina. In queste due espressioni l'ombra è segno del compito, della strada assegnata a ciascuno, indica quindi la **presenza di qualcosa che c'è**.

In questi due canti, Dante usa la parola ombra riprendendo alcuni passi biblici:

"Custodiscimi come pupilla degli occhi,
proteggimi all'**ombra** delle tue ali,
di fronte agli empi che mi opprimono,
ai nemici che mi accerchiano."¹⁵

"Io sono un narciso di Saron, un giglio delle valli. Come un giglio fra i cardi, così la mia amata tra le fanciulle. Come un melo tra gli alberi del bosco, il mio diletto fra i giovani. Alla sua **ombra**, cui anelavo, mi siedo e dolce è il suo frutto al mio palato."¹⁶

Nel Paradiso Dante usa la parola "ombra" per indicare l'**incapacità del suo ingegno** a contenere l'intera esperienza che ha vissuto. Infatti la sua conoscenza mondana offuscata ancora dai sensi la contrappone all'imperturbabile onniscienza divina:

"Lume non è, se non vien dal sereno
che non si turba mai; anzi è tenebra

¹⁴ Paradiso, canto I, v.49-54

¹⁵ Sal. 16, 8

¹⁶ Il cantico dei cantici 2, 1-3

od ombra de la carne o suo veleno.”¹⁷

Per questo nel canto I chiede l’ispirazione necessaria affinché la propria *vis* intellettuale significhi almeno un’ombra dell’esperienza compiuta:

“O divina virtù, se mi ti presti
tanto che l’**ombra** del beato regno
segnata nel mio capo io manifesti”¹⁸

Dopo l’invocazione, nel canto II Dante paragona il proprio intelletto a una barca:

“O voi che siete in piccioletta barca,
desiderosi d’ascoltar, seguiti
dietro al mio legno che cantando varca,
tornate a riveder li vostri liti:
non vi mettete in pelago, ché forse,
perdendo me, rimarreste smarriti.”¹⁹

Alla fine del Paradiso, nel canto XXXIII Dante accosta la sua difficoltà nel ricordare l’esperienza che ha fatto del senso ultimo alla dimenticanza della vicenda degli Argonauti, essendo accaduta venticinque secoli prima.

“Un punto solo m’è maggior letargo
che venticinque secoli a la ‘mpresa,
che fé Nettuno ammirar l’**ombra** d’Argo.”²⁰

Gli Argonauti costruirono la prima imbarcazione e furono gli inventori della navigazione: la barca letteraria di Dante condivide con loro questo primato. Nettuno scorta l’ombra degli Argonauti, allo stesso modo l’ombra di Dante, cioè la navicella del suo ingegno, è scortata da Dio. Dante non può recare in porto più che un’ombra dall’esperienza oltremontana (*trasumanar*) che ha fatto.

Il poeta può raccontarci solo la pallida immagine di ciò che ha visto:

“e avrà quasi l’**ombra** de la vera
costellazione e de la doppia danza
che circolava il punto dov’io era”²¹

Anche in questo caso il significato di “ombra” è indizio di qualcosa che c’è.

L’ombra della navicella Dante ce la indica quindi come **strada da seguire**: l’ombra è la strada per noi. Ed è diversa dall’ombra dei poeti ispirati a cui il Parnaso impediva di guardare la verità:

¹⁷ Paradiso, canto XIX, v.64-66

¹⁸ Paradiso, canto I, v.22-24

¹⁹ Paradiso, canto II, v.1-6

²⁰ Paradiso, canto XXXIII, v.94-96

²¹ Paradiso, canto XIII, v.19-21

“O isplendor di viva luce etterna,
chi palido si fece sotto l'*ombra*
sì di Parnaso, o bevve in sua cisterna,
che non paresse aver la mente ingombra,
tentando a render te qual tu paresti
là dove armonizzando il ciel t'*adombra*,
quando ne l'aere aperto ti solvesti?”²²

In entrambi i percorsi un concetto avvertito come «presenza negativa» (non infinito, non presenza) e per ciò relegato a un livello necessariamente implicito, in un percorso fatto di secoli (per la matematica) o di narrazione (per Dante) raggiunge un'essenza positiva e finalmente esplicita.

²² Purgatorio, canto XXXI, v.139-145