

Liceo Classico Alexis Carrel
ESAME DI STATO
2014-2015

L'oggettività dell'astrazione

di Anna Fornoni

5°k - 2015

Nella mia tesina voglio mostrare come nel secolo scorso alcuni matematici ritenevano che la matematica fosse una creatura dell' uomo e come tale poteva essere manipolata e modificata a loro piacimento al fine di costruire una teoria astratta e perfetta. Invece il matematico Godel dimostrò l'esatto contrario e cioè che la matematica è data all'uomo ed è indipendente dall'uomo ed ha una sua oggettività

1) SOGNO CULTURA SCIENTIFICA INIZIO 1900

All'inizio del 1900 durante la belle époque, dopo mezzo secolo di positivismo, la cultura scientifica coltivò un sogno di unificare le sue teorie ma questo desiderio fu infranto dalla crisi di senso avvenuta nella prima metà del 1900.

FISICA:

Per quanto riguarda la fisica si unificarono le diverse teorie con lo scopo di trovare una legge unica come aveva fatto Maxwell alla fine dell' 1800.

1861-65 Maxwell unificò i fenomeni elettrici e i fenomeni magnetici, con le sue 4 leggi, sotto l'unica teoria dell'elettromagnetismo

Ma successivamente sorsero numerosi problemi aperti a cui la fisica classica non era in grado di rispondere.

1905 relatività ristretta di Einstein critica la fisica classica di Newton (saltano gli assoluti di massa e tempo che dipendono dalla velocità dell'osservatore e introduce un nuovo assoluto: la velocità della luce che è la massima velocità nell'universo)

1915 relatività generale di Einstein critica la fisica classica di Newton (descrive i moti dei corpi celesti spiegando le cose non spiegate da fisica classica attraverso l'introduzione dello spazio curvo)

1900-1930 teoria dei quanti (l'energia in natura non è un continuo ma è presente in natura per quanti) -> probabilità

1925 Heisenberg -> principio di indeterminazione (impossibilità di stabilire la posizione di un elettrone in un atomo in un certo istante di tempo perché nel momento in cui lo si osserva, si altera l'energia dell'atomo)

MATEMATICA:

Invece in matematica per quasi mezzo secolo si ebbe il sogno di costruire una teoria perfetta. Però prima di analizzare le caratteristiche di questa teoria vorrei fare alcune notazioni storiche che hanno portato a una tale esigenza.

Nel IV-III secolo a.C. Con gli Elementi di Euclide nacque la geometria euclidea: Una teoria fondata sull'intuizione e sull'evidenza

Nel 1700 si svilupparono le geometrie non euclidee (geometria iperbolica ed ellittica): Due teorie costruite a partire dalla negazione del quinto postulato di Euclide e costruite con un metodo logico deduttivo. Qui ci si accorse di aver fatto più affidamento all'intuizione e all'evidenza che al rigore.

Nacque un'esigenza di rigore che sviluppò nel 1800 nel riduzionismo il cui scopo era di ricondurre la matematica all'aritmetica. Questo procedimento era già stato effettuato da Cartesio che aveva ricondotto la geometria all'algebra, ma i riduzionisti fecero un ulteriore passo verso una semplificazione ulteriore con l'aritmetica per i teoremi di Peano (che derivano tutta la matematica dall'aritmetica). In particolare si analizzò il problema del continuo con Dedekind e Cantor

Nel 1899 il movimento assiomatico di Hilbert con la pubblicazione 'Fondamenti della Geometria' integrò la geometria euclidea con 10 assiomi in modo tale che fosse possibile dedurre tutte le proposizioni dagli assiomi.

Questa esigenza di rigore fu accompagnata e incitata da altri problemi come quello dell'infinito e i paradossi della teoria degli insiemi.

L'8 Agosto del 1900 si tenne il congresso di Parigi in cui Hilbert propose una lista di 23 problemi aperti che era una sorta di programma per il 1900. I problemi principali erano: Il continuo e la dimostrazione in maniera diretta della completezza e la consistenza

dell'aritmetica. Ma questi erano principalmente 2 problemi logici e qui emerse in maniera evidente il legame tra matematica e logica

2)FONDAMENTI E SCUOLA ASSIOMATICA

Quindi l'impegno dei matematici fu diretto nel trovare un teoria perfetta (coerente, non contraddittoria e completa) che coincideva con il rifondare la matematica e stabilire anche il legame tra logica e matematica.

- scuola logicista (Russel e Whitehead) fonda matematica sulla logica

- scuola intuizionista (Poincaré e Brower) fonda la logica sull' intuizione fondamentale matematica

-scuola assiomatica (Hilbert) rifondare la matematica e quindi l' aritmetica con un sistema di assiomi completo coerente e non contraddittorio

- la matematica e la logica procedono di pari passo
- assiomi sono vuoti di significato, sono solo simboli (convenzionalità)
- metodo: Metamatematica= studio proprietà dei sistemi formali della matematica, dimostra la coerenza della matematica (perciò si sarebbe fondata anche la geometria)

3)GÖDEL

1931: primo teorema incompletezza matematica

“Se una qualsiasi teoria formale T adatta ad abbracciare la teoria dei numeri è coerente e se gli assiomi del sistema formale dell'aritmetica sono assiomi o teoremi di T , allora T è incompleto. Cioè, c'è un enunciato S della teoria dei numeri tale che né S né $\text{non-}S$ è un teorema della teoria. Ora, o S o $\text{non-}S$ è vero; c'è allora un enunciato vero di teoria dei numeri che non è dimostrabile.”

-> esistono verità indimostrabili e nel sistema vi sono asserzioni che sono indecidibili, ma intuitivamente vere quindi l'intuitivamente certo va al di là della dimostrazione matematica.

Secondo teorema di incompletezza

“La coerenza di un sistema che abbraccia la logica e la teoria dei numeri non può essere stabilita se ci si limita a quei concetti e a quei metodi che possono essere rappresentati formalmente nel sistema della teoria dei numeri.”

→ la coerenza dell'aritmetica non può essere stabilita dalla ristretta logica permessa dalla metamatematica

SHOCK:matematica é inesauribile (non chiudibile in un sistema)

-> riprende importanza l'intuizione e l' empirismo (esperienza sensibile)

->colpo mortale all' assiomatizzazione di Hilbert perchè il rigore non é sufficiente.

->implicazioni culturali perchè ciò che era sempre stato ritenuto una creazione perfetta dell'uomo risultò come macchiato, imperfetto.

Oltre a questi due teoremi di enorme impatto globale non solo sulla comunità scientifica ma anche su altri ambiti della cultura, Godel presento nei suoi scritti altre idee interessanti e innovative rispetto ai suoi contemporanei. Vorrei proporre due che mi hanno colpito particolarmente.

-a) PLATONISMO o REALISMO.: nello scritto ***Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e le loro implicazioni filosofiche*** del 1951 Godel sostiene che La matematica non sia una libera creazione della mente umana e porta a sostegno della sua tesi tre argomenti che vi voglio leggere. Questi argomenti non sono in alcun modo esaustivi, ma penso siano particolarmente chiari semplici ed esemplificativi.

3 argomenti

1)“*Prima di tutto se la matematica fosse una nostra libera creazione, potrebbe ancora esservi l'ignoranza su aspetti degli enti creati, è vero, ma solo per la mancanza di una chiara consapevolezza di ciò che abbiamo creato. Tale ignoranza avrebbe dovuto quindi scomparire appena ottenuta una piena lucidità. Però i progressi moderni nei fondamenti della matematica hanno ottenuto un livello di chiarezza insuperabile, ma questo non è stato in pratica di nessun aiuto per la soluzione di problemi matematici.*

IL FATTO DI AVER OTTENUTO UNA NOTEVOLE CHIAREZZA NEI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA è STATO DI POCO AIUTO PER LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI MATEMATICI

2)“*In secondo luogo l'attività dei matematici rivela molto poco quella libertà di cui dovrebbe godere un creatore. Anche se, per esempio, gli assiomi sugli interi fossero una libera invenzione, si dovrebbe ancora ammettere che il matematico dopo aver immaginato le prime proprietà dei suoi oggetti, in numero ridotto, fosse giunto al termine della sua abilità creativa, e non fosse nella posizione di creare secondo la sua volontà la validità dei teoremi. Se nella matematica esiste qualcosa di analogo alla creazione, allora l'azione di ogni teorema consiste esattamente nel restringere la libertà creativa. Ciò che restringe deve tuttavia esistere indipendentemente dalla nostra creazione*”

I MATEMATICI NON POSSONO STABILIRE A VOLONTÀ LA VALIDITÀ DEI TEOREMI

3)“ *In terzo luogo, se gli enti matematici sono nostre creazioni, allora evidentemente gli interi e gli insiemi interi devono essere due creazioni diverse, la prima delle quali ha bisogno della seconda. Tuttavia per dimostrare certe proprietà degli interi è necessario il concetto di insieme di interi. Così in questo caso, per trovare proprietà che noi abbiamo dato a degli oggetti della nostra immaginazione, dobbiamo prima creare certi altri oggetti – una situazione davvero strana!*

PER DIMOSTRARE CERTE PROPOSIZIONI SUGLI INTERI DOBBIAMO UTILIZZARE IL CONCETTO DI INSIEMI DI INTERI , MA LA CREAZIONE DEGLI INTERI NON “COMPORTE” QUELLA di insiemi interi. Quindi risulta che siamo nella situazione davvero strana di dover attuare una creazione ulteriore per stabilire quale proprietà abbiamo dato agli interi che si era supposto fossero una nostra creazione.

“la visione platonista è l'unica sostenibile. Con ciò intendo l'idea che la matematica descrive un realtà non sensoriale, che esiste indipendentemente da sia dalle azioni sia dalle disposizioni della mente umana e che viene solo percepita, e probabilmente percepita in modo incompleto, dalla mente stessa. Questo punto di vista è molto impopolare fra i matematici; ci sono però alcuni grandi matematici che hanno aderito ad esso . Per esempio Hermite una volta ha scritto la seguente proposizione: 'Esiste, se non sono in errore, tutto un mondo che è l'insieme delle verità matematiche, nel quale non possiamo accedere che con l'intelligenza, così come esiste il mondo delle realtà fisiche; ambedue indipendenti da noi, ambedue di creazione divina'. ”

b) Godel mantiene l'idea della matematica come un sistema di verità ma rifiuta l'idea che la base di queste verità sia la loro derivabilità da assiomi .

Analiticità: 'analitico' qui non significa 'vero in base alle nostre definizioni', ma piuttosto ' vero per natura dei concetti che in esso occorrono'. [...] questo concetto di analitico è così lontano dall' accezione ' vuoto di significato' che è addirittura possibile che una proposizione analitica possa essere indecidibile. Infatti la nostra conoscenza del mondo dei concetti può risultare altrettanto limitata e incompleta di quella del mondo delle cose. [...] ho parlato di proposito di due mondi distinti(il mondo delle cose e il mondo dei concetti) [...].

“La certezza della matematica va assicurata coltivando la conoscenza dei concetti astratti che conduce all'impostazione di quei sistemi meccanici”

“Il procedimento deve quindi consistere in una chiarificazione di senso che non consiste nel definire. Ora, oggi esiste l'inizio di una scienza che afferma di avere un metodo sistematico per una tale chiarificazione di senso e questa è la fenomenologia fondata da Husserl. La

chiarificazione di senso consiste qui nel mettere a fuoco più nitidamente i concetti coinvolti dirigendo la nostra attenzione in un modo determinato [...]"

" Si tratta di una procedura che dovrebbe produrre in noi un nuovo stato di coscienza nel quale descriviamo nel dettaglio i concetti base che usiamo nel nostro pensiero o affermiamo concetti fondamentali finora sconosciuti"

Metodo chiarificazione : Fenomenologia di Husserl

[Ragione per accettare la fenomenologia: lo sviluppo di un bambino procede in due direzioni:

prima parte :sperimenta con gli oggetti del mondo esterno e con i suoi organi di senso e di movimento. La scienza empirica ne è uno sviluppo sistematico e cosciente

seconda parte: sempre maggiore comprensione del linguaggio, vale a dire, dei concetti fondamentali su cui si fonda. "Nello stabilire in modo sistematico gli assiomi della matematica divengono evidenti sempre nuovi assiomi che non seguono logicamente da quelli stabiliti in precedenza."

"questo cogliere in modo intuitivo sempre nuovi assiomi logicamente indipendenti dai precedenti coincide con la concezione kantiana della matematica."

Oltre il relativismo

«Naturalmente il compito di assiomatizzare la matematica in senso stretto differisce dalla concezione ordinaria della assiomatica in quanto gli assiomi non sono arbitrari, ma devono essere proposizioni matematiche corrette, nonché evidenti senza dimostrazione. Non c'è via di fuga dall'obbligo di assumere certi assiomi o certe regole di inferenza come evidenti senza dimostrazione» (Gödel)]

quindi la matematica non è uno strumento per creare la verità ma è uno strumento per conoscerla. La verità della matematica non la crea l'uomo ma risiede al di fuori di esso (platonismo) e l'uomo può solo avvicinarsi a questa verità attraverso un processo di conoscenza (fenomenologia di Husserl)

CONCLUSIONE: per riprendere il titolo..

*Realismo " E corretto il fatto che una proposizione matematica non dice nulla sulla realtà fisica o psichica che esiste nello spazio e nel tempo, perché è già vera in base al significato dei termini che occorrono in essa, indipendentemente dalle cose reali. Ciò che è erroneo però è il fatto che si affermi che il significato dei termini è un qualcosa fatto dall'uomo, e che consiste semplicemente di convenzioni semantiche. **La verità, credo, è che questi concetti***

costituiscano una realtà oggettiva per proprio conto, che noi non possiamo creare o cambiare, ma solo percepire e descrivere.

[→ Oltre il relativismo

→ si intuizione matematica di kant (husserl ha come idea centrale kant)ma vs kant perché l'oggettività non risiede nel soggetto, ma è data dalla stessa natura dell' oggetto.]

“e inevitabile la conclusione che anche per tale corpo fisso e ben definito di proposizioni matematiche, il pensiero matematico `e e deve rimanere essenzialmente creativo. Secondo l'autore questa conclusione deve risolversi inevitabilmente in un rovesciamento almeno parziale dell'intera corrente assiomatica della fine del secolo XIX e dell'inizio del XX, con un ritorno al significato e alla verità in quanto appartengono all'essenza della matematica.”

Emil L. Post

Di fronte all'inesauribile complessità della matematica, Gödel vedeva l'infinita capacità della mente umana di decifrarla.