Marta Lodi Rizzini

Liceo scientifico Alexis Carrel

Anno scolastico 2013/2014

Classe VB

IL CONTINUO,
UN DIALOGO TRA REALTÀ E PENSIERO

INDICE

Introduzione 2

I. Una prima definizione 3

II. Il continuo filosofico 6

III. I problemi sorti in età ellenistica 11

- La duplicazione del cubo 11
- La diagonale del quadrato 12
- La quadratura del cerchio 13
- I paradossi di Zenone 14

IV. La continuità della retta 16

V. Le definizioni matematiche 18

- Ordine 18
- Densità 19
- Completezza 19

VI. Uno sguardo alla fisica 21

VII. Le implicazioni sull'infinità del reale 23

VIII. Un paradosso concettuale 25

Conclusione 27

Bibliografia 29

INTRODUZIONE

«Natura non facit saltus».[1]

Tale concezione, già diffusa nel III secolo a.C. e riportata in questa forma da Linneo nel XVIII secolo, descrive ogni ente o fenomeno naturale come continuo, caratterizzato da gradualità, privo di interruzioni: letteralmente, la natura non fa salti. Giungere a tale conclusione è giustificabile se innanzitutto se ne ricercano i motivi nel primo mezzo che l'uomo possiede per conoscere il reale: i sensi. L'analisi sensoriale infatti è sempre stata fonte di una percezione di continuità; basti pensare all'impossibilità di distinguere le componenti di un liquido, le cui molecole sono invisibili all'occhio.

Proprio quest'ultima osservazione, che sembra affermare la falsità della frase di Linneo, deriva da una conoscenza che sfrutta strumenti che affinano e superano i sensi dell'uomo (per esempio il microscopio). Eppure, non solo la percezione sensibile, ma anche la matematica, con la scoperta degli irrazionali, avvalora l'esistenza del continuo. Il dubbio che sorge di conseguenza riguarda il corrispettivo fenomenico della continuità, la quale dalle attuali conoscenze di fisica quantistica pare essere solo un'astrazione del pensiero. Dunque l'interpretazione sensoriale è da ritenersi fallace (e con essa diversi secoli di storia in cui l'uomo si è convinto della continuità intrinseca della natura)?

Per trovare maggiore chiarimento a tale domanda, questo elaborato si promette di approfondire da un punto di vista filosofico e matematico i concetti di continuo e discreto, per poi porli in relazione ai fenomeni della realtà col supporto della fisica. Sebbene il problema di un'effettiva corrispondenza con ciò di cui si ha esperienza non sia eliminabile, in quanto tale questione è ancora oggi aperta, un tentativo di comprensione premia per diversi motivi. Hanno ruolo in questo ambito, infatti, sia la realtà fenomenica che il metodo con cui l'uomo ne apprende certi aspetti; così l'impegno umano di conoscenza si dimostra un valido mezzo con cui il pensiero cerca di raggiungere l'ente, di comprenderlo, di ricrearlo come concetto. Questo

[1] C. Linné, *Philosophia Botanica*, cap. 27, 1751.

dialogo tra infinità – la mente umana, che in potenza può pensare tutto, e la realtà, che in atto è tutto – chiama partecipe ognuno di noi, perché riguarda l'uomo e il mondo che lo circonda.

I. Una prima definizione

Consideriamo le definizioni consultabili sul dizionario[2] di continuo e discreto.

continuo agg.	***1*** Che si svolge o si ripete senza interruzione, nel tempo o nello spazio. ***2*** Ininterrotto, perenne.
discreto agg.	***1*** Chiaro, distinto. ***2*** *(mat.)* Detto di parti separate e distinte | Detto di grandezza che può assumere solo valori separati e distinti fra loro. CONTR. Continuo.

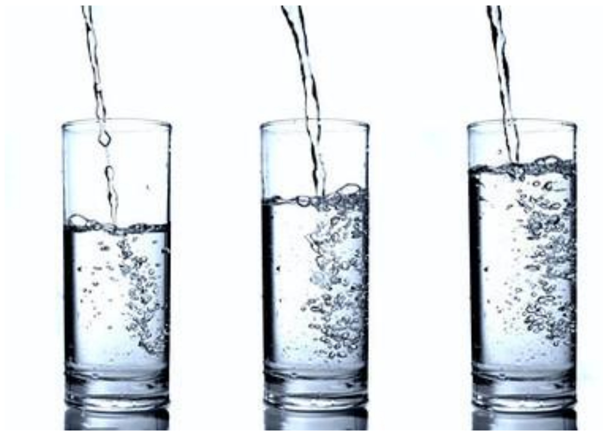
Da queste, si riscontra il più immediato modo di descrivere il concetto di continuità, ovvero come l'assenza di interruzioni. Come si mostrerà nella seconda sezione, questa definizione è sempre stata chiara nella mente dell'uomo, fin dal VI secolo a.C., sebbene delle più complete formulazioni risalgano solo al XIX secolo, con Dedekind, Cantor e Hilbert. Infatti prima del 1858, anno in cui Dedekind formulò il suo postulato, la nozione di continuità era quella intuitiva di continuità geometrica, intesa come divisibilità illimitata; verrà dimostrato nella quinta sezione che questo concetto non può bastare per descrivere il continuo, in quanto anche un insieme denso presenta questa proprietà. Per risalire dunque al significato più completo di continuo e discreto, si affronterà un percorso che vuole partire da un'iniziale osservazione rispetto ad oggetti concreti, per poi riepilogare in breve – attraverso la filosofia – come l'uomo nei secoli ha percepito e descritto la realtà, ed infine arrivare a dare delle precise definizioni matematiche. Da qui si solleverà il problema dell'origine discreta o continua di oggetti e fenomeni naturali, che verrà trattato col supporto della fisica.

[2] N. Zingarelli, *Vocabolario della lingua italiana*, XII ed. (1994) a cura di M. Dogliotti e L. Rosiello, Zanichelli.

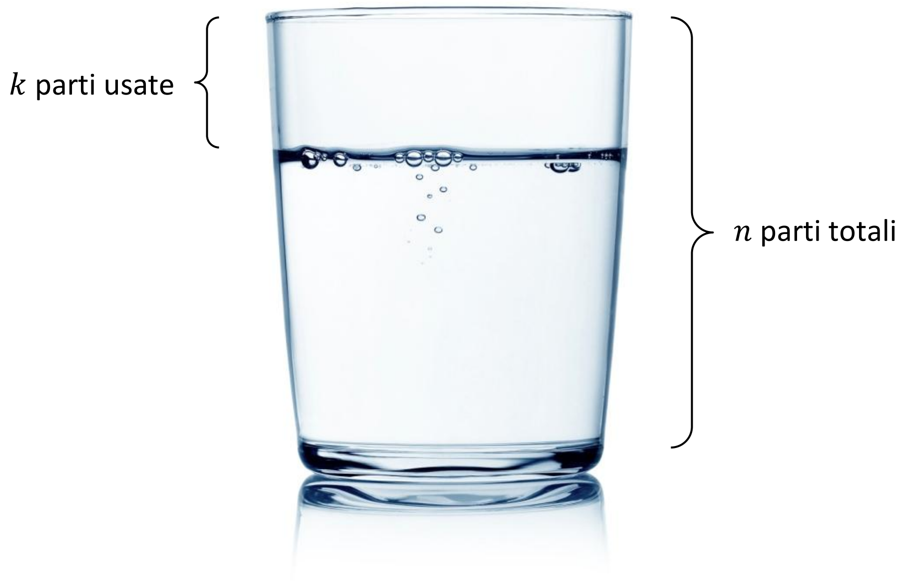
In matematica, questi termini sono apparsi con il progressivo ampliamento del concetto di numero. A partire dall'esigenza di misurare degli oggetti concreti, le grandezze necessarie si sono fatte sempre più articolate, così che dai numeri naturali si è passati ai relativi, ai razionali, ai reali e in ultimo anche ai numeri complessi. Questi passaggi sono dovuti al fatto che non è sempre possibile stimare la misura di un oggetto in base a una data unità di misura. Un esempio può aiutare a comprendere questa difficoltà.

Considerato un vaso di caramelle, per sapere quante di queste sono contenute in esso è sufficiente contarle una per una. Il risultato sarà un numero intero, perché non ci saranno caramelle che si dividono, nell'atto di riempire il vaso: una caramella o è dentro al vaso, o è fuori. Per tale operazione dunque bastano i numeri naturali (ℕ).

Invece, nel caso in cui si volesse riempire il vaso d'acqua, l'oggetto unitario da contare non sarebbe più così facilmente identificabile. Allora si rende necessario adottare un'unità di misura, come un bicchiere, che a sua volta si possa contare. Se il vaso contenesse con precisione un determinato numero di bicchieri d'acqua, il problema sarebbe ancora risolvibile nell'insieme dei numeri naturali. Ma ciò non avviene sempre: può accadere che versare un bicchiere in più sia eccessivo, per cui l'acqua trabocca al di fuori del vaso, e al contempo senza di esso il vaso non sarebbe totalmente pieno. A questo punto occorre versare quest'ultimo bicchiere un po' alla volta, così che si riesca a riempire il vaso senza fuoriuscite. Quanti bicchieri d'acqua sono



serviti? A tale domanda si risponde osservando quanta acqua dell'ultimo bicchiere è stata utilizzata. Dividendolo in n parti tali che il numero k di quelle mancanti dal bicchiere sia naturale, si può esprimere la capacità del vaso come il numero intero di bicchieri usati all'inizio e n parti su k di quell'ultimo bicchiere in cui è rimasta dell'acqua. Si nota così che i numeri razionali ($\mathbb{Q}$) sono stati necessari per questa misurazione.



Da questi esempi appare evidente che l'insieme dei numeri naturali è discreto, perché le caramelle sono distinte e contabili. Per quanto riguarda i numeri razionali, invece, verrebbe da associare il loro insieme al concetto di continuo, in quanto sembra che l'ultimo bicchiere possa essere diviso in tutte le parti necessarie affinché si possa stimare con precisione la capienza del vaso. Se si pensa alla definizione data all'inizio di continuità, non si riscontrano interruzioni nei valori assumibili dall'acqua misurata con un bicchiere, perché sembra che comunque sia il livello del bicchiere la quantità d'acqua avanzata sia esprimibile in funzione del bicchiere stesso. Ma questa impressione è ingannevole, come si mostrerà nella sezione terza: ci sono grandezze che non possono essere misurate in funzione di una data unità di misura, e questo problema porterà poi all'introduzione dei numeri reali.

II. IL CONTINUO FILOSOFICO

Pensare il mondo fenomenico come continuo è naturale inclinazione dei sensi dell'uomo. La percezione sensibile non riscontra interruzioni negli oggetti in sé, né nella loro evoluzione nello spazio e nel tempo. Ad esempio, è tendenza comune ammettere che una palla che rotola da un punto A a un punto B assuma tutte le posizioni possibili dello spazio da A a B, senza che vi siano punti in cui essa non sia stata presente in un certo istante.
Nell'osservazione, tuttavia, distinguere le parti è spesso soltanto un passaggio poco immediato. Di fronte a un telo di stoffa la prima immagine che si forma nella mente non è quella dei fili che lo costituiscono, ma del telo stesso; ciò nonostante, i componenti sono comunque identificabili, ad una più attenta e raffinata analisi. L'esperimento mostra che un'apparenza di continuità non è sufficiente a garantire questa qualità. Dunque il dubbio circa l'efficacia di tale metodo è più che lecito: quanto è precisa e attendibile la percezione dell'uomo?

Ulteriore conferma alla legittimità di questo problema è fornita dalla filosofia, fin dai primi tentativi di dare una spiegazione convincente ai fenomeni della natura. Il mondo greco ha portato esempi – tra cui Talete, Eraclito e Parmenide – di come questo ricercato ordine razionale venisse inizialmente fondato su concetti di continuità. Il medesimo ambito di ricerca ha accolto teorie di carattere opposto, espresse da pitagorici ed atomisti. Il dibattito sulla natura continua o discreta del mondo fenomenico ha quindi interessato l'uomo da secoli, dimostrandosi una questione di non facile soluzione.

Già nel VI secolo a.C. con **Talete** si sollevò il problema che concerne il principio (l'*arché*), ossia l'origine di tutte le cose. L'*arché* è ciò da cui deriva e in cui si risolve tutto il reale, e che permane immutato nelle varie forme che via via assume; per questo motivo identificarlo con l'acqua, come fece il filosofo di Mileto, implica il riconoscimento di un'origine unica che dà continuità alla natura (*physis*). Quando infatti egli affermava che «tutto è pieno di dei» intendeva come tutto sia pervaso

dal principio originario, e dunque non esista qualcosa che non sia riconducibile alla continuità dell'acqua.
Riguardo agli oggetti nello spazio e al loro mutamento nel tempo, un filosofo che diede una descrizione che ampliò il concetto intuitivo di continuo è **Eraclito** di Efeso, il teorico del divenire, ovvero del perpetuo processo di mutamento cui tutto l'universo è soggetto. Il suo pensiero si articola secondo la formula del *panta rhei* (tutto scorre), che esprime la perpetua successione degli eventi e la conseguente unicità degli stessi; infatti attraverso la metafora del fiume che scorre, egli notò che non è possibile bagnarsi due volte nella stessa acqua.
La dinamicità che caratterizza la filosofia eraclitea ha trovato opposizione con **Parmenide** di Elea. Partendo dall'analisi di ciò che essenzialmente è, egli descrisse l'essere come ingenerato, eterno, omogeneo, immutabile e finito, accentuandone inoltre l'indivisibilità, in quanto tutto è uno, intero, continuo.

Un'opinione contraria alla continuità della natura è stata addotta da filosofi come i pitagorici o gli atomisti.
I primi, noti per la loro religiosa devozione alla razionalità della matematica, posero a fondamento di tutto i numeri interi e i loro rapporti, sulla scia del maestro **Pitagora**. Secondo questi matematici, dunque, la natura assume la caratteristica del discreto, e ciò è di particolare evidenza proprio perché l'insieme dei razionali presenta dei "buchi" che non copre. Queste discontinuità furono già percepite dai pitagorici, ad esempio con l'esigenza di misurare la diagonale di un quadrato a partire dal lato. La leggenda vuole che lo studente che preparò la dimostrazione di tale incommensurabilità venne ucciso dallo stesso Pitagora, a conferma dell'inconciliabilità delle sue teorie con l'esistenza di numeri irrazionali. Il problema di questi segmenti che non si possono esprimere in relazione tra loro parve avvalorare una teoria di continuità della materia, che non sembrava essere descrivibile con soli valori discreti.
Di altra natura sono le riflessioni dei filosofi pluralisti del V secolo a.C., che si concentrarono sull'aspetto fisico del reale. Di questo gruppo, i non atomisti quali Anassagora e Empedocle, sebbene videro alla base di tutto un principio di

molteplicità, esposero la continuità e l'infinita divisibilità della natura (concetti spesso associati, nonostante la matematica mostri che sono ben diversi) prevalentemente a livello didascalico. Sono stati gli atomisti ad aver discretizzato l'essenza delle cose, e in particolare **Democrito**, sulla base delle teorie del suo maestro Leucippo. Egli impostò la struttura dell'universo sull'alternanza di pieno e vuoto e, affermando che la materia non è divisibile all'infinito, individuò le ultime componenti di ogni cosa esistente, ovvero gli atomi (*àtomoi*, senza divisione). La varietà degli enti materiali deriva dunque dai diversi movimenti vorticosi di tali particelle. La tesi di Democrito risulta piuttosto attuale poiché, nonostante l'indivisibilità degli atomi sia stata confutata tramite la scoperta di elettroni, protoni e neutroni, resta aperto il quesito sull'esistenza di un invalicabile limite naturale oltre al quale non è trovabile parte più piccola.

L'ultima sintesi riguardo all'idea di continuo nella filosofia greca fu portata nel IV secolo a.C. da **Aristotele**, che in contrasto con il suo maestro Platone – il quale affermava che il continuo è costituito da indivisibili – vedeva impossibile questa caratteristica. Egli tuttavia non imponeva una effettiva divisione in infinite parti, ma piuttosto parlava di una potenziale divisibilità all'infinito, intesa come proprietà essenziale, come possibilità mai totalmente attuata. Il suo discorso parte dall'analisi dell'estensione, un dato immediato (tutte le cose sono estese) e al contempo indefinibile; il tentativo aristotelico verte quindi su una descrizione dell'esteso, distinguendone tre generi: continuo, contiguo e consecutivo. «Continue sono tutte le cose le cui estremità sono una cosa sola, e sono contigue quelle le cui estremità sono insieme, e consecutive quelle in mezzo a cui non c'è nulla di affine».[3] Enti consecutivi possono essere le goccioline d'acqua della nebbia, sparse nell'aria, separate l'una dall'altra, ma formanti un unico fenomeno; contiguo è ciò che vede le sue parti a contatto, come le piastrelle di un pavimento, distinte tra loro e in mezzo alle quali non v'è altro; il continuo infine presenta parti senza confini di separazione precisi, secondo una divisibilità non attutata. Queste definizioni mostrano che già in tempi antichi, nonostante la coscienza di un significato

[3] Aristotele, *Physica*, VI, 1, tr. it. di A. Russo, *Fisica*, in *Opere*, vol. 3, Roma-Bari 1973, p. 137.

matematico fosse ancora in via di formazione, era stata intuita una distinzione precisa tra quelli che oggi sappiamo essere concetti ben diversi da quello della continuità. Infatti ciò che Aristotele aveva precisato come consecutivo e contiguo sembra essere la descrizione di quantità discrete, tra le quali nel primo caso esistono altri enti diversi da quelli presi in considerazione (l'aria in mezzo alle goccioline d'acqua) e nel secondo caso non si riscontra la presenza di altro (le piastrelle ben unite non comprendono alcunché in mezzo a loro).

Venti secoli più tardi, **Leibniz** sollevò un'altra difficoltà: nella realtà le parti sono anteriori al tutto, il semplice al composto, perciò il continuo reale non sarebbe che un aggregato di semplici, mentre matematicamente dovrebbe essere divisibile all'infinito. Questo egli affermava in quanto riteneva la realtà fosse costituita da un complesso di sostanze individuali e spirituali, le monadi, che sono dunque separate e distinte tra loro. Perciò la sua filosofia ammette innanzitutto le parti e solo in seguito, come conseguenza della loro aggregazione, il tutto, il che si contrappone al concetto di continuità matematico. La conclusione del suo ragionamento fu l'idealità del continuo, che egli definì come ciò in cui «la differenza di due casi può essere diminuita al di sotto di ogni grandezza data».[4] Tale formulazione sfrutta la nozione matematica di infinitamente piccolo, che è alla base dell'analisi infinitesimale. Occorre però precisare che essa non è propriamente la definizione di continuità, dal momento che anche un insieme denso ma non continuo, come l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali, gode di questa proprietà, e lo si mostrerà nella quinta sezione.
«Tutto va per gradi nella Natura, e niente con salto»[5]: con questa affermazione Leibniz anticipò la formulazione «Natura non facit saltus» di Linneo, che oggi è divenuta quasi un adagio popolare. Il filosofo tedesco con ciò intendeva mostrare l'esistenza di un principio di continuità che risiede nella serie ordinata delle monadi che compongono l'universo e nella loro attività. A questo proposito sembra che Leibniz abbia espresso due concezioni contrastanti: da una parte la presenza delle

[4] G. W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, vol. VI, Berlino 1849-63, p. 129.
[5] G. W. Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, vol. IV, cap. 16, § 12, 1704.

monadi induce a pensare la realtà fenomenica come discreta, dall'altra il principio di continuità fornisce l'immagine di una progressione graduale in natura. È proprio questo il tentativo leibniziano di conciliare la percezione continua con l'appercezione saltuaria, tramite quella *Mathesis universalis* che vuole descrivere con il linguaggio univoco della matematica i fenomeni della realtà. I due lati della medaglia infatti sono aspetti di un'unica realtà, permettendo contemporaneamente la conservazione dell'identità delle singole monadi – quindi della loro conoscenza da parte dell'uomo (che apprende solo distinguendo, definendo gli enti) – e della totalità che esse formano – l'universo e la sua continuità.

A sostegno dell'idealità del continuo, di cui prima di Leibniz aveva trattato Aristotele con il porre la divisibilità come potenza, si possono trovare molti altri filosofi. Kant riteneva impossibile conciliare la metafisica, che non ammette la divisibilità all'infinito, e la matematica, che invece la esprime come condizione necessaria al continuo. Anche Lachelier sosteneva che l'esteso non può essere reale: è sua caratteristica avere parti distinte e dunque, se è reale, non può essere che un aggregato di tali parti; ma poiché anche ognuna di queste è estesa, il procedimento di definizione è infinito (e dunque non esiste una vera "definizione"). Risulta dal suo ragionamento che il continuo, essendo una forma di estensione, non si dà se non nella coscienza, dove si può avere un tutto prima delle sue parti, diviso cioè da esse, ma non costituito. Si riconosce in queste filosofie una forte influenza aristotelica, perché era proprio con la potenza delle parti che Aristotele spiegava l'esistenza non attuata dell'esteso.

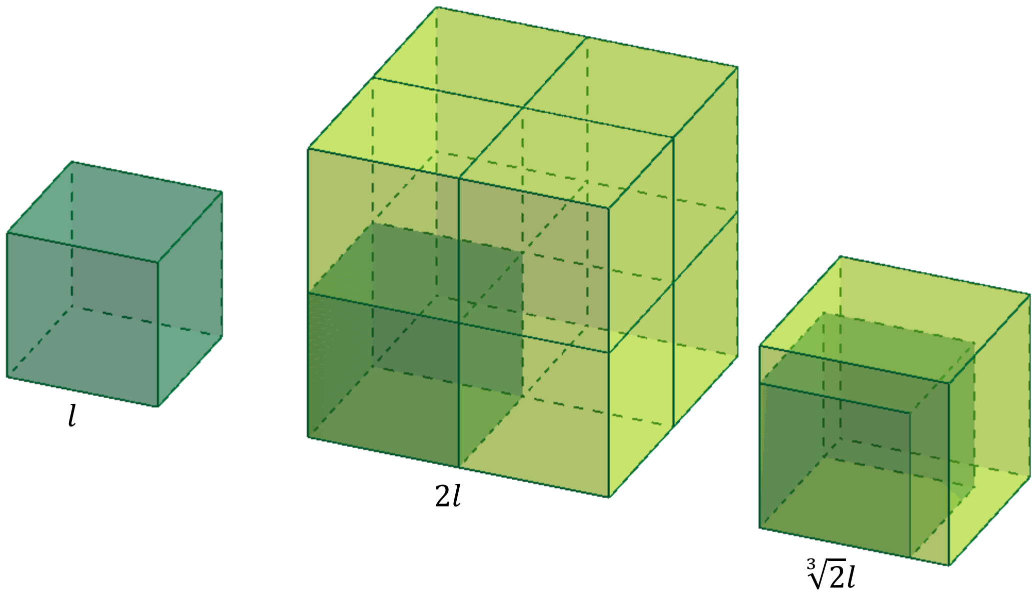
Le concezioni filosofiche sono state tante e diverse: contrastanti eppure spesso simili, ciò non fa che acuire maggiormente la sensazione che queste definizioni manchino di rigore. Un chiarimento di tali espressioni è stato raggiunto dalla matematica, che – come si affronterà nella quinta sezione – non si è limitata a porre una distinzione tra i due concetti, ma ha individuato una terza proprietà, la densità, che si pone come termine medio.

Il breve riepilogo filosofico è atto a sottolineare l'intuizione che già secoli fa ha fatto sorgere la problematica di questo dualismo. Ad avvalorare l'impressione di tale discrepanza tra discreto e continuo si possono portare quei quesiti che già in tempi antichi hanno segnato l'inizio di un percorso volto a definire tali concetti.

III. I PROBLEMI SORTI IN ETÀ ELLENISTICA

Di seguito si riportano quei problemi di natura matematica che fin dal V secolo a.C. hanno mostrato l'incommensurabilità tra due grandezze (i primi tre esempi) o l'incapacità di trattare il continuo (i paradossi di Zenone). La risposta a tali questioni è possibile soltanto con l'introduzione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che colma quelle interruzioni inammissibili secondo i paradigmi precedenti: gli irrazionali.

- LA DUPLICAZIONE DEL CUBO



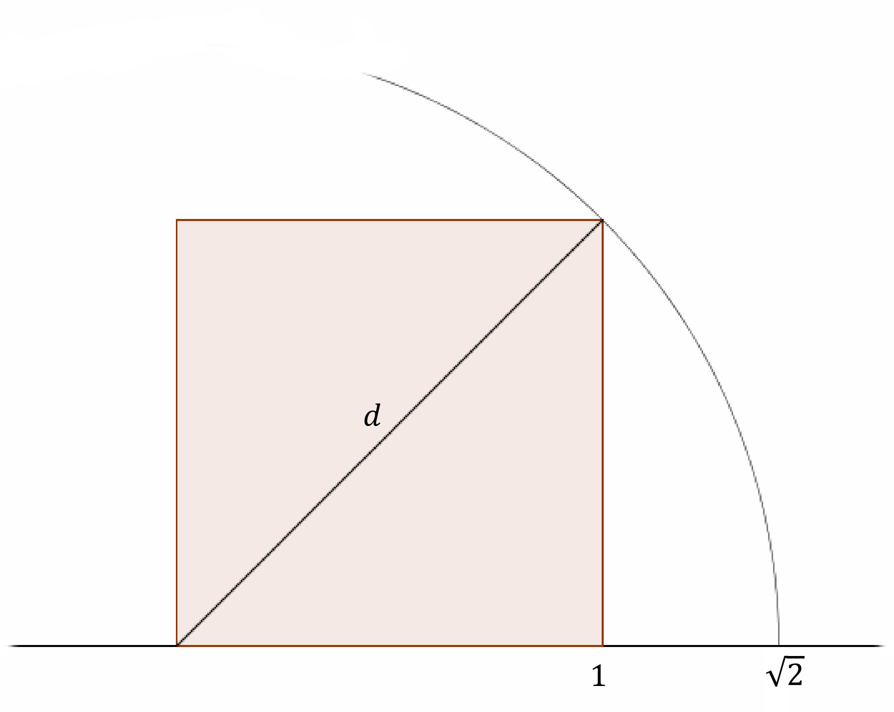
Il filosofo e matematico Teone di Smirne racconta che verso il 500 a.C. la peste colpì l'isola di Delo e che gli abitanti, interrogato l'oracolo di Apollo circa il metodo con cui liberarsi dell'epidemia, si trovarono di fronte alla necessità di dover costruire al dio un altare più grande di quello che già era presente nel tempio, e precisamente maggiore il doppio. L'altare aveva forma cubica, perciò quando i Greci tentarono di risolvere il problema raddoppiandone il lato, ciò che ottennero fu un cubo il cui volume era otto volte quello del primo. La corretta soluzione richiederebbe la conoscenza dei numeri irrazionali quali $\sqrt[3]{2}$, ma ai tempi era impensabile l'esistenza di un segmento non individuabile con gli strumenti elementari (riga e compasso).

$$V_{tempio\ richiesto} = 2V_{tempio\ esistente}$$

$$x^3 = 2l^3$$

$$x = \sqrt[3]{2}l$$

- LA DIAGONALE DEL QUADRATO



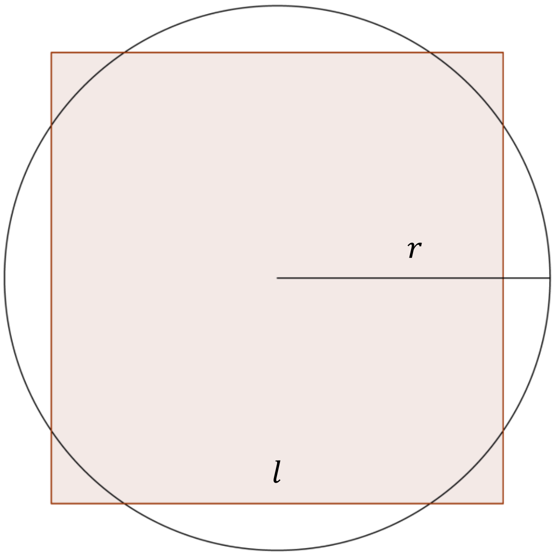
Avendo a disposizione il teorema di Pitagora, i matematici di Crotone lo applicarono al triangolo ottenuto da due lati e la diagonale di un quadrato di lato 1, cercando di trovare la misura dell'ipotenusa in funzione del cateto di cui era nota la misura. Oggi è noto che essa ha misura $\sqrt{2}$ (un numero irrazionale), se entrambi i cateti valgono 1, ma ai tempi l'operazione inversa della potenza non era ancora utilizzata per quei numeri che non erano quadrati perfetti. Il problema infatti, come si è già anticipato, provocò scandalo tra i pitagorici, che non potevano concepire l'esistenza di numeri non razionali. L'esatta misura della diagonale del quadrato rispetto al lato rimase a loro ignota, al più solamente restringibile tra due numeri razionali infinite volte, ma mai identificata. Il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti tra loro incommensurabili, proprio perché non esiste un numero razionale che esprima una grandezza in funzione dell'altra.

$$1^2 + 1^2 = d^2$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

- La quadratura del cerchio



Questo problema consiste nel trovare il quadrato equivalente a un cerchio di dato raggio r, e quindi conoscere la misura del lato l di tale quadrato. Per i Greci non era possibile trovare la risposta, in quanto eguagliando le aree di quadrato e cerchio si ottiene un'equazione in l la cui soluzione comprende la radice quadrata di π. Nel 1882 Ferdinand von Lindemann dimostrerà che π è un numero trascendente, ovvero è irrazionale non algebrico (un numero algebrico è esprimibile come soluzione di un'equazione polinomiale), a differenza di $\sqrt{2}$ che è irrazionale algebrico. A maggior ragione allora gli strumenti elementari non possono disegnare tale quadrato; i Greci cercarono una soluzione inesistente nell'insieme $\mathbb{Q}$.

$$S_{quadrato} = S_{cerchio}$$

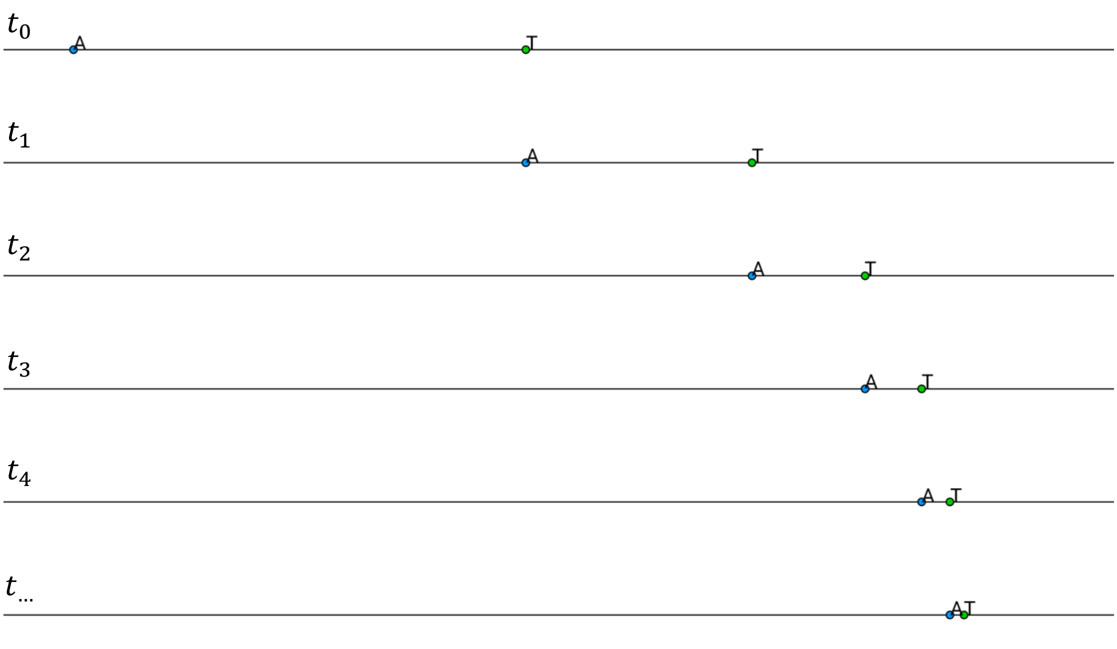
$$l^2 = \pi r^2$$

$$l = \sqrt{\pi} r$$

N.B. Essendo che tutte le variabili in gioco rappresentano segmenti, occorre considerare le radici come aritmetiche e non algebriche. Nel problema 2 la diagonale può assumere solo il valore $+\sqrt{2}$, e anche in quest'ultimo caso non è corretto considerare entrambi i valori che elevati al quadrato danno π: tra $\pm\sqrt{\pi}$ si sceglie solamente $+\sqrt{\pi}$.

- I PARADOSSI DI ZENONE

L'apporto di Parmenide è stato fondamentale per la logica, soprattutto perché a lui è possibile attribuire l'introduzione del metodo deduttivo, che da definizioni e verità generali arriva a nuove conclusioni attraverso passaggi necessari. Una particolare forma di deduzione consiste nella dimostrazione per assurdo, ampiamente sfruttata dal suo discepolo Zenone: assumendo come premesse il contrario di ciò che si vuole provare, si evidenzia l'erroneità delle conclusioni che si possono trarre. È proprio questo il principio su cui Zenone basa i suoi paradossi, dei quali si vuole analizzare uno dei più famosi: Achille e la tartaruga.



Considerato un percorso rettilineo, Achille e la tartaruga procedono nella stessa direzione, il primo a velocità maggiore della seconda. La tartaruga possiede un certo vantaggio rispetto ad Achille, che per raggiungerla impiegherà un tempo t_1; tuttavia nello stesso tempo la tartaruga è avanzata di uno spazio che, sebbene inferiore a quello percorso da Achille, la distanzia da lui. Nell'intervallo successivo t_2 – inferiore a quello precedente, dal momento che lo spazio tra Achille e la tartaruga è diminuito – che gli serve per raggiungere la nuova posizione dell'animale, essa si sposta di un altro poco. Questo procedimento si può ripetere all'infinito, e così Zenone dimostra che Achille non raggiungerà mai la tartaruga, nonostante essa sia più lenta.

La conclusione di Zenone è in ovvia contraddizione con ciò che l'esperienza afferma: nessuno dubita che in una effettiva gara tra due concorrenti la cui velocità è diversa vi sia un momento in cui il più celere raggiungerà il più lento. Tuttavia l'intelletto, e lo dimostra il fatto che per secoli questi paradossi hanno attratto e scomodato molti alla ricerca di una risoluzione, non sembra concepire la falla in questo ragionamento. Eppure un errore c'è, ed è precisamente quello di considerare la somma di infiniti elementi (gli intervalli di tempo in cui Achille deve raggiungere la tartaruga, che sono infiniti perché si è detto che questo processo è applicabile infinite volte) come un numero infinito (il tempo totale che Achille impiega per arrivare alla tartaruga, che se fosse infinito vorrebbe dire che egli non la raggiunge mai). In altri termini, Zenone riteneva che le due successioni i cui termini sono le posizioni dopo gli intervalli di tempo t_n di Achille e della tartaruga fossero divergenti, e non convergenti, come invece si mostrerà nella prossima sezione.
L'implicazione di questa convinzione è l'inesistenza di un punto sulla retta che soddisfi la richiesta iniziale, cioè che Achille raggiunga la tartaruga. Ma se una retta non è completa, mancando di un punto, allora essa non è continua. Come appena mostrato, tra le conseguenze a questo errore di valutazione si trova l'inesistenza della continuità geometrica, considerazione che si pone in antitesi con quanto mostrato nei tre problemi precedenti, in cui la continuità geometrica era un'evidenza, a differenza di quella numerica.

Da un punto di vista filosofico, questo esempio mostra che Zenone pensava che il continuo, essendo indefinitamente divisibile, fosse composto da un numero infinito di parti. Pertanto, supposta la realtà del continuo, sarebbe impossibile il moto, perché ciò che è mobile, per percorrere un qualunque tratto continuo, dovrebbe passare all'infinito per la metà della metà di un sempre esistente tratto continuo. Ciò è evidente anche nel paradosso della freccia scoccata che, dovendo sempre raggiungere un punto intermedio precedente al punto di arrivo, è in realtà ferma. Difatti Aristotele scrive che il ragionamento di Zenone è «sulla inesistenza del movimento, per la ragione che il mosso deve giungere prima alla metà che non al termine».[6] Questa è la spiegazione della dicotomia, ovvero l'applicazione del principio geometrico secondo cui sulla retta tra due punti A e B esiste il punto medio M. La conseguenza è che iterando tale procedimento tra A e M si deve necessariamente trovare un secondo punto medio M', e nuovamente ve ne sarà un terzo tra A e M', e lo stesso vale infinite volte. Dunque tra due punti A e B ve ne sono infiniti, e questo è il concetto di densità, che non basta a definire il continuo.

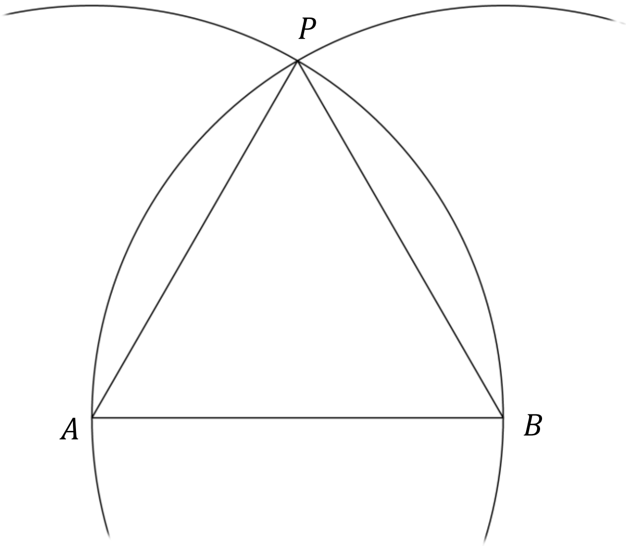
IV. La continuità della retta

Sebbene nei problemi appena illustrati risulti che l'esistenza del continuo è stata motivo di scandalo, incomprensione o errore, a livello geometrico questo concetto è sempre stato dato per scontato. Infatti le difficoltà scaturite assieme alle dette questioni sono di natura concettuale, nonostante sorgano sulla base di oggetti concreti, e ciò accentua soltanto la differenza tra ciò che si vede come evidenza e ciò che si rielabora con l'intelletto, tra l'esperienza e l'ideale.

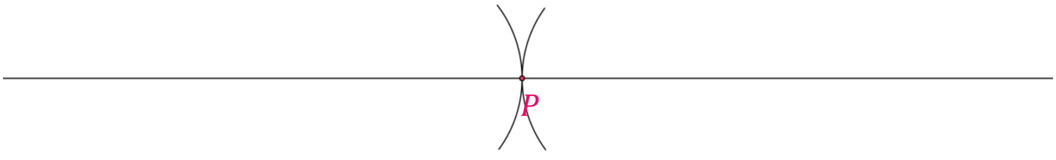
Che la continuità geometrica fosse considerata come un dato di fatto appare da tutti i casi in cui, prima del XIX secolo, si considerava per forza esistente il punto ottenuto dall'intersezione di luoghi geometrici come la retta o la circonferenza. Ammesso questo principio, per il quale in ogni punto si tagli una retta ivi esiste un punto appartenente a tale retta, allora è giustificabile – per esempio – la

[6] Aristotele, *Physica*, VI, 9.

costruzione con riga e compasso di un triangolo equilatero. Dato un lato di misura l, infatti, disegnare altri due lati congruenti a esso è possibile sfruttando la definizione di circonferenza come luogo geometrico, in modo che le intersezioni tra le due circonferenze costruite con raggio di misura l e centri nei due estremi del lato distino ugualmente da entrambi tali estremi. Dunque una di queste intersezioni, unita agli estremi del lato, diventerà vertice del triangolo ricercato, assieme agli estremi stessi. Una così semplice costruzione geometrica in realtà presuppone un concetto che negli assiomi di Euclide non era stato esplicitato: la continuità della retta.



Solo nel 1858 Dedekind garantì la continuità della retta, assiomatizzandola nella proposizione che segue.
«Se tutti i punti della retta si dividono in due classi tali che ogni punto della prima classe giace a sinistra di ogni punto della seconda classe, allora esiste uno e un solo punto che produce questa separazione di tutti i punti in due classi, questa suddivisione della retta in due parti».



In termini equivalenti, suddividendo la retta in due parti separate e complementari, deve esistere l'elemento di separazione, e appartiene a tale retta. Questo principio verrà ripreso anche da Hilbert per il suo sistema di assiomi, in particolare per il V gruppo, comprendente i postulati di continuità. Per questo motivo la geometria moderna ha avuto bisogno di ampliare, rispetto al sistema euclideo, le proprie proposizioni primitive con Hilbert: non erano sufficienti i postulati di Euclide, in quanto garantivano l'ordine e la densità, ma non la completezza della retta. Conseguenza di queste formulazioni è la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con la retta, che per questo viene chiamata retta reale. È grazie a questa stretta relazione tra numeri e punti, tra algebra e geometria, che è stato possibile sviluppare quella importante branca della matematica che è l'analisi.

V. Le definizioni matematiche

Se la retta reale è completa, ovvero continua, anche l'insieme $\mathbb{R}$ presenta questa caratteristica. Tuttavia la definizione di continuità è esprimibile senza dover necessariamente ricorrere a un'evidenza geometrica (e quindi a un postulato). Una ragione aggiuntiva per ricercare una formulazione che non si basi sull'assioma di Dedekind si trova nel fatto che il continuo geometrico si fonda sul continuo aritmetico, e non viceversa. Secondo le definizioni elaborate verso la fine del XIX secolo, il continuo aritmetico è caratterizzato da tre proprietà essenziali, che ora verranno esposte.

- Ordine

Un insieme si dice ordinato se in esso è possibile stabilire una relazione d'ordine (maggiore $>$, minore $<$, maggiore o uguale $\geq$, minore o uguale $\leq$), la quale gode delle proprietà antisimmetrica e transitiva. Analogamente, il continuo è ordinato perché gli elementi di ciò che è continuo possono sempre essere messi in una relazione d'ordine tra di loro.
L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un insieme ordinato.

Questa caratteristica descrive la successione delle parti che costituiscono il continuo: per esempio, una collana di perle in sé non è ordinata, dal momento che ogni perla potrebbe precederne o seguirne un'altra; affinché essa lo diventi, occorre stabilire un verso di percorrenza e una perla di partenza.

- DENSITÀ

La proprietà di densità, come già accennato riguardo i paradossi di Zenone, permette sempre di individuare un terzo oggetto compreso tra due dati oggetti.

$$\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 < x_2\ \exists k \in A\ t.c.\ x_1 < k < x_2$$

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, oltre ad essere ordinato, è denso.
Riconsiderando l'esempio precedente, non c'è modo di rendere la collana di perle densa, perché tra due perle consecutive non ce ne sarà mai una terza. La densità è invece riconoscibile in ciò che si può tagliare infinite volte, ottenendo sempre una sua parte: a livello concreto è molto difficile immaginare un oggetto che soddisfi tale proprietà. Si potrebbe pensare che i liquidi o i gas siano densi, essendo che comunque si suddividano si riesce sempre a trovare una partizione più piccola. Però, come verrà mostrato nella sesta sezione, questa supposizione rischia di essere ingannevole.

- COMPLETEZZA

La completezza si può formulare in diversi modi equivalenti.

→ Un insieme è completo se ogni elemento separatore di due classi contigue di esso è ancora appartenente all'insieme.

Due classi si dicono contigue se sono separate e indefinitamente ravvicinate.
Due classi A e B sono separate se un qualsiasi elemento della prima è minore di un qualsiasi elemento della seconda.

$$\forall\ a \in A, b \in B\ a < b$$

Esse sono indefinitamente ravvicinate se, considerato un numero positivo ε arbitrariamente piccolo, si possono trovare elementi delle due classi la cui differenza sia, in valore assoluto, minore di ε.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; a \in A, b \in B \; t.c. |b - a| < \varepsilon$$

Considerate due classi contigue di numeri razionali, l'elemento di separazione è un numero reale.

→ Un insieme è completo se ogni successione che soddisfa la condizione di Cauchy è convergente a un elemento di tale insieme.

Una successione $\{a_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ converge a un numero ℓ se esiste un numero intero positivo oltre al quale qualsiasi valore assuma n, la distanza del termine n-esimo da ℓ sarà sempre inferiore a un qualsiasi numero positivo ε.

$$\{a_n\} \to \ell \; \Leftrightarrow \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; t.c. \forall n > N \; |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Una successione che rispetta la condizione di Cauchy è una sequenza fondamentale. Ogni successione convergente è anche una sequenza fondamentale, ma non è detto che valga il viceversa: in caso affermativo, si è verificato il requisito affinché l'insieme a cui appartiene il valore a cui tende la successione sia completo. La condizione di Cauchy prevede che la distanza tra i termini della successione, all'aumentare di n, si riduca sempre di più, finché essa non tenda a 0, se n tende a infinito.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; t.c. \forall n > N \; |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

Perciò, se la condizione di Cauchy è sufficiente alla convergenza di una data successione, si ha completezza.
Considerata una sequenza fondamentale di numeri razionali, essa converge a un numero reale.

→ Un insieme è completo se ogni suo sottoinsieme limitato superiormente ammette un estremo superiore appartenente a tale insieme.

Un insieme si dice superiormente limitato se ammette almeno un maggiorante, che per definizione è maggiore di ogni elemento del dato insieme di cui è maggiorante. Tra tutti i maggioranti, il minore è detto estremo superiore del dato insieme, e si indica con sup o lub (*least upper bound*).

$$supA = \alpha \; \Leftrightarrow \; \forall x \in A \; x \leq \alpha \;\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \in A \; t.c. \alpha - \varepsilon < \bar{x} < \alpha$$

Se per ogni $A \subset U$ accade che $supA \in U$, allora U è un insieme completo.

Considerato un insieme di numeri razionali limitato superiormente, il suo estremo superiore è un numero reale.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, oltre ad essere ordinato e denso, è completo.
Questa proprietà è forse la più difficile da rintracciare in un esempio concreto, in quanto concettualmente la mente non vede differenza tra un oggetto denso e uno completo. Si potrebbe pensare che l'acqua ancora una volta può fornire un modello reale di quanto si afferma in termini matematici, perché lo stesso principio intuitivo che porta a crederla densa implica che essa sia anche completa. Ma questo ragionamento si basa su qualcosa di cui non si può avere la certezza, e che coincide con quelle stesse prime definizioni individuate nel corrente linguaggio comune (il dizionario) e nelle filosofie che nei secoli hanno sì variato il proprio contenuto, ma mantenuto fisso il concetto di continuo. È infatti sull'assenza di interruzioni che l'intelletto può costruire un'immagine, e non sulle più rigorose definizioni matematiche appena enunciate.

VI. Uno sguardo alla fisica

Dopo aver dato una precisa definizione dei concetti di discreto, denso e continuo, sorge il problema di quali enti della realtà essi effettivamente rappresentino.
Con l'aiuto delle scoperte scientifiche degli ultimi secoli, è noto che molte grandezze in natura sono quantizzabili. Ogni quantità di carica elettrica riscontrabile è multipla della carica elementare, assunta dall'elettrone o dal protone. L'energia di un elettrone in un atomo è sempre un multiplo intero dell'energia che esso assume allo stato fondamentale; lo stesso si può dire per la distanza che esso possiede dal nucleo dell'atomo, che varia con proporzionalità inversa a quella dell'energia. Einstein dimostrò che sia le radiazioni che la materia hanno quanti di energia, e si può osservare il medesimo riguardo all'energia trasportata dai fotoni. Da questo breve accenno a ciò di cui si hanno tracce quantistiche, viene naturale pensare che qualsiasi altra cosa esistente sia riconducibile a valori discreti.

Tuttavia questo è valido per quanto riguarda grandezze come l'energia o la carica elettrica associata ad un certo oggetto. Se si volesse considerare l'ente in sé, ovvero la materia, bisognerebbe portare altri esempi, ma anche questi non mancano: ad oggi si sa che la materia è costituita da bosoni (mediatori delle forze, trasportano energia), fermioni (quark e leptoni, caratterizzati dal possesso di massa) e vuoto. In questo caso, dunque, si può fare un'osservazione analoga, in quanto gli elementi ultimi sono identificabili, separati, come fossero monadi.
Che queste unità base siano effettivamente le ultime e indivisibili può anche essere messo in dubbio, e comunque il risultato non varierebbe. Se anche la materia ammettesse monadi più piccole di quelle oggi note, sarebbe ugualmente discreta; lo stesso vale se questo procedimento fosse iterabile all'infinito, perché una volta trovati dei costituenti distinguibili tra loro, come fossero i tasselli di tutto ciò che esiste, la proprietà di densità non sarebbe più applicabile per individuare altri tasselli in mezzo a due dei già intravisti. Questo vale perché una grandezza che è infinitamente quantizzabile è pur sempre quantizzabile, ovvero discreta.

Allora tutto ciò che esiste è discreto? Molte scoperte fisiche lo confermano. Eppure, ricordando le difficoltà da cui è nata la necessità di ampliare il concetto di numero, esposte nella prima e nella terza sezione, si è visto che ogni passaggio – dai naturali ai razionali, dai razionali ai reali – era frutto di un'esigenza molto concreta, cioè quella di misurare grandezze a partire da una data unità. Se davvero la realtà non fosse altro che discreta, vorrebbe dire che, nonostante sia una forte attinenza col reale che ha portato a ricercare qualcosa di più dei numeri naturali, la struttura che si è elaborata per risolvere tali difficoltà non rispecchia affatto il caso reale. Dunque il continuo non sarebbe altro che un'astrazione della mente, che ha poco a che fare con la realtà. Già con questa constatazione si riscontra un'apparenza di contraddittorietà nel concetto del continuo, che è nato da necessità concrete, e allo stesso tempo non sembra rappresentare alcunché di reale.

Scrive Einstein in un suo saggio: «Nella misura in cui i teoremi matematici si riferiscono alla realtà essi non sono sicuri, e nella misura in cui sono sicuri essi non si riferiscono alla realtà».[7] Davvero esiste questo enorme scarto tra ciò che è oggetto della matematica e ciò che invece si vede nella realtà?

Se la natura fosse davvero discreta, si comprenderebbe perché l'esattezza assoluta di un esperimento, per anni creduta esistente solo con una precisione infinita (proprio ad avvalorare il fatto che molti erano convinti della continuità, o almeno della densità, di ciò che esiste), è raggiungibile con una accuratezza dell'ordine della scala di Planck. Quest'ultima infatti si dimostra sufficiente a ripetere le condizioni iniziali, che sono numericamente finite, sebbene siano molte. Vi sono diversi elementi, quindi, che concorrono a far pensare a un modello discreto della natura.

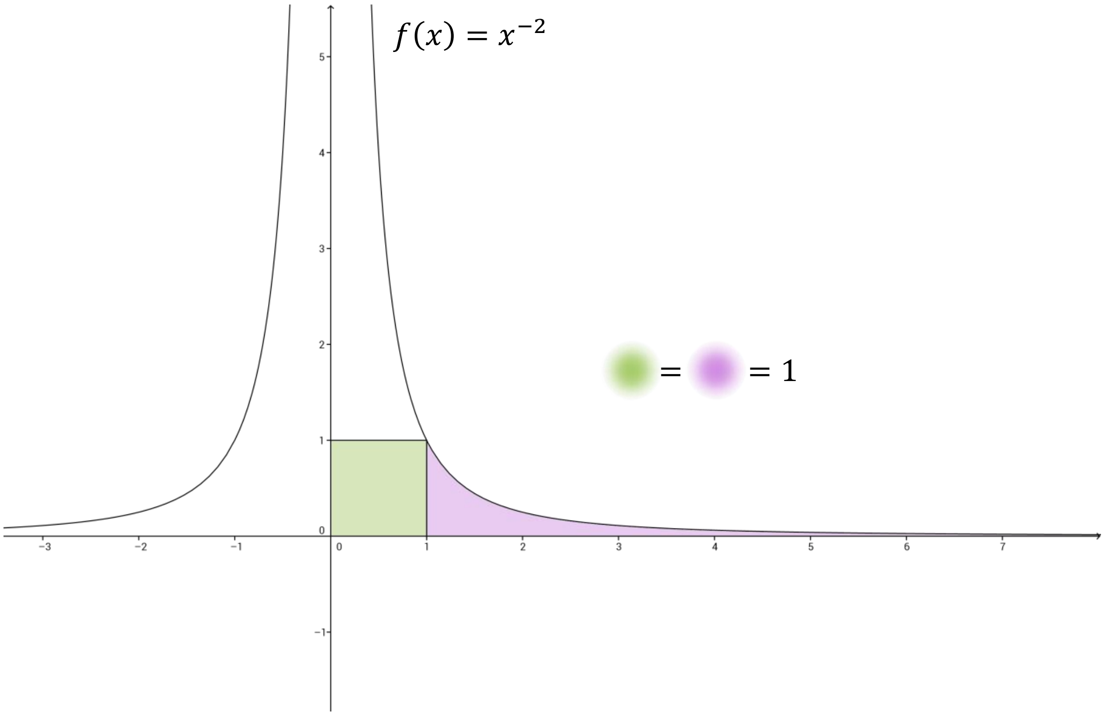
VII. LE IMPLICAZIONI SULL'INFINITÀ DEL REALE

Prendendo ora come vera un'ipotesi sulla struttura della natura, si vogliono illustrare alcune conseguenze, per capire davvero cosa implica ciascuna linea di pensiero.

Se ciò che esiste nell'universo fosse continuo, vorrebbe dire che ciò che è limitato nello spazio ammette in sé un'infinità di elementi. Accade lo stesso nell'insieme dei numeri reali: in un intervallo limitato, sia esso aperto o chiuso, vi sono infiniti numeri, che hanno la stessa cardinalità di tutto l'insieme $\mathbb{R}$. Se dunque ogni cosa che possiede limiti spaziali è in sé infinita, allora la forma di infinito presente in natura, per usare termini aristotelici, è un infinito in atto, perché considerato un oggetto esistente, di cui si ha totale visione, esso ha già in sé l'infinito.

Se si considerasse la natura come densa, l'infinito sarebbe ugualmente in atto, perché ancora una volta osservando un oggetto limitato nello spazio si vedrebbe contemporaneamente un'infinità di elementi. A differenza di una realtà continua, però, questa ipotesi porterebbe ad ammettere interruzioni negli enti del mondo fenomenico. Quindi sarebbe una realtà incompleta, la cui materia si spande con infinite discontinuità.

[7] A. Einstein, *Geometrie und Erfahrung*, Berlino 1921.



La funzione rappresentata è $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^{-2}$ e le aree evidenziate sono equivalenti. Infatti $\int_1^{+\infty} \mathrm{x}^{-2} = 1$, dove l'integrale improprio permette di trovare l'area viola. Il risultato è sorprendente: una parte di piano illimitata è equivalente alla parte di piano delimitata dal quadrato verde. Ciò significa che all'interno del quadrato si trova lo stesso tipo di infinito della zona viola: per questo motivo l'insieme $\mathbb{R}$ ammette in sé, oltre a un infinito in potenza, un infinito in atto.

Diversamente accadrebbe se si ipotizzasse discreta la realtà. I numeri naturali, infatti, hanno cardinalità finita all'interno di un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, perché ad esempio tra 5 e 27 si sa che vi sono esattamente 21 elementi se si escludono gli estremi, o 23 se essi si contano. L'infinito nell'insieme dei numeri naturali non si trova in un suo sottoinsieme limitato superiormente e inferiormente; esso è possibile solo con la distanza infinita dal numero finito considerato, per questo è un infinito in potenza. Analogamente in una natura discreta ciò che ha limiti di spazio è anche finito in sé, mentre l'infinito è irraggiungibile con lo sguardo umano, perché lo si trova allontanandosi sempre di più dalla propria posizione. Se l'universo non avesse limiti di spazio e fosse allo stesso tempo discreto, l'unico infinito presente nella realtà sarebbe ai "confini" dell'universo, che per ipotesi non esistono, in quanto si spostano sempre più in là di quanto si riesce a raggiungere (non solo fisicamente, ma anche col pensiero).

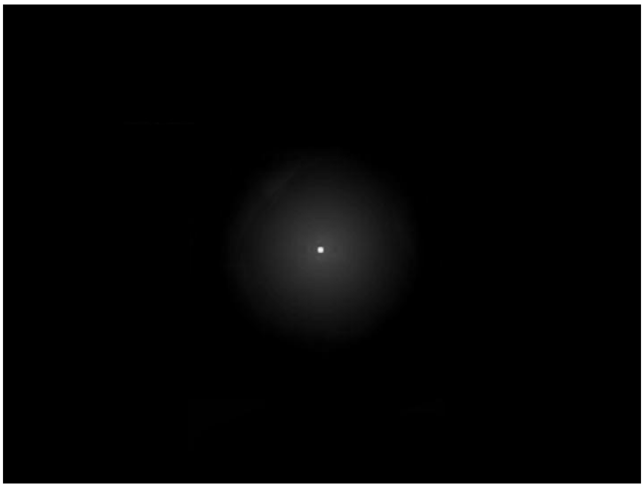
Descritte così le tipologie di infinità che ogni concezione della natura porta con sé, si nota da subito che se l'universo fosse discreto l'uomo un giorno potrebbe davvero cogliere tutto ciò che un oggetto dice di sé, perché i suoi elementi sarebbero finiti. Esasperando questo discorso, avverrebbe che in un futuro sufficientemente lontano la conoscenza che si possiede su un oggetto limitato nello spazio sarebbe assoluta, e nulla vi si potrebbe aggiungere, a meno di scoprire nuovi aspetti dello stesso ente. Un'ipotesi senz'altro iperbolica, ma che è diretta conseguenza del pensare la natura come discreta, e quindi localmente finita.

VIII. UN PARADOSSO CONCETTUALE

Si è già mostrato che la mente fatica a pensare qualcosa avente in sé delle interruzioni, a maggior ragione se si trova a dover immaginare l'universo intero come discontinuo. Ma allora per quale condizione il mondo fenomenico, che finora appare discreto, può effettivamente essere continuo? Riflettendo sulla natura degli elementi che compongono il continuo, si nota un interessante particolare che sembra essere comune a tutto ciò che di continuo si riesce a pensare.

Innanzitutto, si considerino lo spazio e il tempo: la percezione dell'uomo rispetto a queste due dimensioni è sicuramente di continuità. Tuttavia la stessa sensazione si ha, ad esempio, nei confronti di un film, che sappiamo essere il risultato del montaggio di diverse immagini in sequenza; ciò prova ancora che la percezione umana è ingannevole. Però, riguardo alle nozioni di spazio e tempo, risulta davvero difficile credere che vi siano delle interruzioni. Questo significherebbe che un corpo in movimento non occupa davvero tutte le posizioni dello spazio, o per meglio dire, tra due posizioni vi è una interruzione che non è propriamente appartenente a ciò che chiamiamo spazio; analogamente, il corpo considerato non è presente sempre, in un dato intervallo di tempo, perché vi sarebbe un salto tra due momenti, il quale non si può catalogare a sua volta come un momento di tempo. Non è impossibile pensare a un caso simile, sebbene sia molto difficile conciliare questa idea con ciò che mostra l’esperienza. Si ammetta allora che spazio e tempo siano continui e si osservi cosa si può analizzare della loro struttura.

Lo spazio è costituito da infiniti punti, come il tempo da infiniti istanti: entrambi questi elementi hanno dimensione nulla, rispetto al tutto di cui sono parte. Il punto infatti è adimensionale e l’istante atemporale. Una simile composizione è ulteriore conferma alla continuità di spazio e tempo, perché a ben pensare anche ciò che si è dimostrato essere continuo, ovvero l’insieme $\mathbb{R}$, è formato da elementi che hanno dimensione nulla. Tutti i numeri, infatti, sono in sé degli elementi privi di materialità, che è possibile pensare come la distanza tra due punti (il numero dato e lo zero, associato all’origine), ma che considerati singolarmente non sono oggetti concreti. La mente dell’uomo tende a immaginare il numero come un punto, perché non vi è altra giustificazione per la sua essenza nulla, che non è associabile a qualcosa di sensibile. Sebbene sembri contraddittorio a questo punto definire l’insieme $\mathbb{N}$ come discreto, in quanto secondo questa osservazione dovrebbe avere anch’esso le caratteristiche del continuo, occorre ricordare che tale conclusione è stata dedotta a partire da un confronto tra i numeri presi in considerazione e l’unità (il numero 1), quindi essi non sono stati trattati individualmente.



L’unica rappresentazione che si può dare di ciò che ha dimensione nulla è in negativo: se la parte nera è ciò che l’uomo conosce, il punto bianco è quell’interruzione la cui natura è diversa da quella di ciò che è noto.

Dunque, se questa condizione di dimensione nulla è sufficiente alla continuità, affinché l’universo sia continuo serve che la natura delle parti sia diversa da quella del tutto. Per l’uomo, che finora ha dimostrato di poter conoscere solo ciò che è del reale, come è possibile pensare di cogliere quello che non ha la dimensione del reale? Come può egli, che è nella realtà e ragiona con la misura del reale, concepire ciò che non rientra nella realtà? La fisica illustra questa impossibilità di cogliere l'istante o il punto, attraverso l'analisi delle variazioni di tempo e di spazio (Δt e Δs), e non degli attimi o delle posizioni in sé. Se anche si considera un punto, occorre esprimerlo sempre in relazione a un livello zero, quindi come distanza da un oggetto precedentemente fissato. Analogamente, la scansione delle ore del giorno procura sì un valore numerico che esprime il preciso istante di tempo, ma solo perché si è stabilito un momento iniziale da cui partire a contare. Per questo l'uomo ha sempre potuto avere coscienza di intervalli di tempo o porzioni di spazio, ma mai di istanti o punti.

Restando a ciò che l'uomo può conoscere del reale, l'universo sarebbe discreto; ma ciò non esclude che esso sia continuo, ovvero ultimamente costituito da parti che non sono propriamente "parti", in quanto non hanno la stessa natura del tutto. Eppure, ammettendo questo caso, la conseguenza è una perenne incommensurabilità tra le facoltà dell'uomo – che come si è mostrato sopra sono capaci di ciò che ha dimensione del reale – e gli ideali elementi che costituiscono il continuo – che sono invece adimensionali. Allora il pensiero, che tende sempre a vedere il continuo, si scontra con quanto può effettivamente misurare della realtà, che sarà sempre discreto. Ma ciò non vanifica il tentativo di comprensione, in quanto è l'astrazione, che lavora sul caso ideale, ad aver permesso in matematica dapprima di notare delle interruzioni, poi di definire con precisione ciò che le avrebbe eliminate. La misura, invece, è un'operazione di confronto che dilata le dimensioni dell'oggetto, ponendolo in relazione ad un altro; per questo una essenza nulla non è fisicamente riscontrabile dall'uomo.

CONCLUSIONE

Nel percorso che si è voluto affrontare, il continuo geometrico – derivato da un problema concreto – è stato così evidente che ha richiesto uno sforzo concettuale per definire qualcosa che ne rappresentasse la portata. Alla luce di ciò che è emerso con l’aiuto della fisica, tuttavia, si può quasi affermare il contrario: il continuo aritmetico appare come un ente costruito senza attinenza con il mondo fenomenico e che fatica a reificarsi in un oggetto reale.

Si è voluto mostrare come quest’ultima difficoltà possa essere dovuta a un limite dell’immaginazione dell’uomo, più che a un’assoluta estraneità del concetto di continuo dal caso reale. Ma quanto è corretto chiamare “limite” ciò che porta la mente umana ad astrarre dalla realtà?

L’intelletto tende per sua natura all’astrazione: è un’esigenza umana. Questa necessità nasce dal fatto che solo astraendo dalla realtà l’uomo riesce a comprendere veramente: ricava una legge applicabile a casi simili ma diversi; crea un modello così da riconoscere una forma nota in altre circostanze; intuisce lo sviluppo dell’oggetto che sta studiando, fino a poterne predire l’andamento; lavorando sul concetto che ha associato al fenomeno concreto, riesce a dire qualcosa di nuovo e allo stesso tempo di vero sul fenomeno in sé, attraverso passaggi logici necessari. Per questo motivo l’astrazione non è affatto un limite della mente umana, come se non potesse restare al dato dell’esperienza. È al contrario una capacità che permette di capire al meglio ciò che si ha di fronte, che non solo è conveniente, ma è essenzialmente un bisogno dell’uomo.

Così, attraverso l’analisi di un concetto che è sorto a partire da difficoltà concrete e che si è poi sviluppato individualmente, non si vuole sminuire l’astrazione matematica, come fosse totalmente slegata dalla realtà, ma al contrario l’intento è di rilanciare a una ricerca di significato che comprende sia il dato empirico che le conseguenze logiche ottenute dalla mente. Il dialogo tra infinità – la realtà e il pensiero dell’uomo – che si era accennato nell’introduzione non è affatto un conflitto, ma un confronto costruttivo.

BIBLIOGRAFIA

V. Miano, R. Maiocchi, “Continuo”, in *Enciclopedia filosofica*, Bompiani, pp. 2246-2250

C. Mangione, S. Bozzi, *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni* (1993), Garzanti

P. Zellini, *Discreto e continuo*, in “Treccani”, 2010 (http://www.treccani.it/enciclopedia/discreto-e-continuo_(XXI_Secolo)/)