MATEMATICA E FISICA: L'ASTRAZIONE CHE SPIEGA LA CONCRETEZZA

APPROFONDIMENTO DI VALENTINA MARIA PERFETTI

INDICE

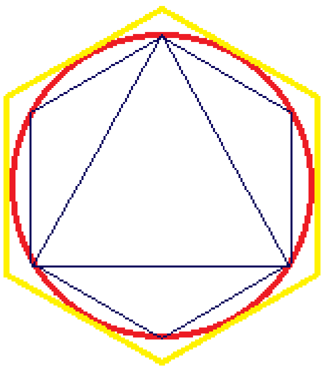
AREA DEL CERCHIO

Nel IV sec a.C. Eudosso di Cnido, matematico della scuola di Platone, inventa in metodo di esaustione.

La parola “esaustione” deriva dal latino *exhaurio* che significa “svuotare completamente”

Questo metodo si basa sull’idea centrale di stimare una determinata area inscrivendo in essa dei poligoni regolari e raddoppiando iterativamente i lati, allo scopo di svuotare ogni volta più della metà della parte di area che non è ancora stata “svuotata” dal poligono precedente.

Il metodo di esaustione viene applicato un secolo dopo da Archimede di Siracusa per stimare l’area del cerchio. Il matematico inscrivendo e circoscrivendo al cerchio dei poligoni regolari trova che l’area del cerchio è compresa tra l’area dei poligoni inscritti con n lati e l’area dei poligoni circoscritti con n lati; all’aumentare del valore del numero n di lati dei poligoni, il valore dell’area del cerchio è sempre meno approssimato.



$$an < c < An$$

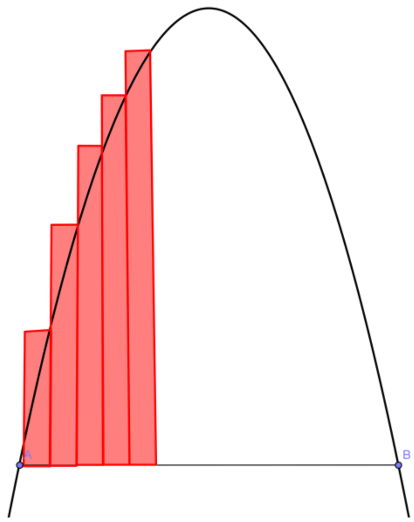
An = area di poligono con n lati circoscritto alla circonferenza
an = area di poligono con n lati inscritto alla circonferenza

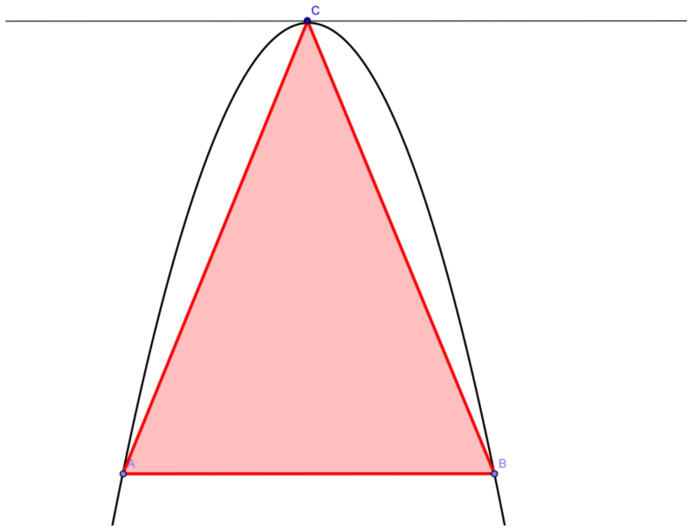
IL SEGMENTO PARABOLICO

Inoltre Archimede riesce anche a stimare l'area del segmento parabolico

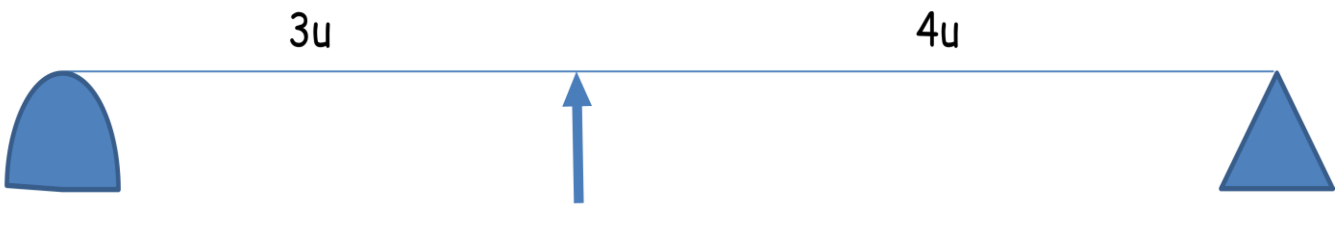
SEGMENTO PARABOLICO: presa una qualsiasi parabola e una sua qualsiasi corda, il segmento parabolico è l'area compresa tra la corda stessa e l'arco di parabola che essa sottende

Egli rielabora il metodo di esaustione, svuotando l'area del segmento parabolico non con poligoni regolari, bensì con dei rettangoli di uguale base e altezza dipendente dall'andamento della parabola





Archimede applica anche il metodo meccanico, associando quindi ad un'area una figura solida con un suo peso, e il principio della leva: da una parte della leva egli appende tutti i rettangoli in cui ha diviso il segmento parabolico – così da concentrare il peso del segmento stesso in un unico punto – mentre dall'altra parte della leva appende il triangolo ABC [Quest'ultimo è costruito unendo i due estremi della corda di partenza con un terzo punto della parabola, nel quale passa la tangente alla conica parallela alla corda]



Perché il sistema stia in equilibrio, Archimede scopre che il fulcro deve essere posizionato ad una distanza di 3 unità di misura dal segmento parabolico e ad una distanza di 4 unità di misura dal triangolo ABC.

Così egli scopre che l'area del segmento parabolico equivale ai $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo

LA RIGOROSITÀ

I risultati ottenuti dai matematici greci sono importanti ma lasciano aperti alcuni problemi – per esempio come calcolare l'area compresa tra una curva e l'asse delle ascisse se la curva in questione non è una parabola – e non soddisfano le esigenze di rigorosità proprie del pensiero matematico.

Dunque gli studi continuano fino a quando, nel 1600, Leibniz e Newton, lavorando in modo indipendente in diversi luoghi d'Europa, arrivano ad introdurre nuovi concetti – quali infinitesimo, limite, derivate, integrali – che portano alla nascita del calcolo infinitesimale.

Il calcolo infinitesimale si divide in calcolo differenziale e calcolo integrale e la sua applicazione matematica permette di descrivere tutte le caratteristiche puntuali di una curva; dal punto di vista fisico ciò significa la possibilità di ricavare valori istantanei di fenomeni in evoluzione variabile nel tempo – per esempio i valori istantanei di velocità e accelerazione di un corpo durante il suo moto.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Isaac Newton

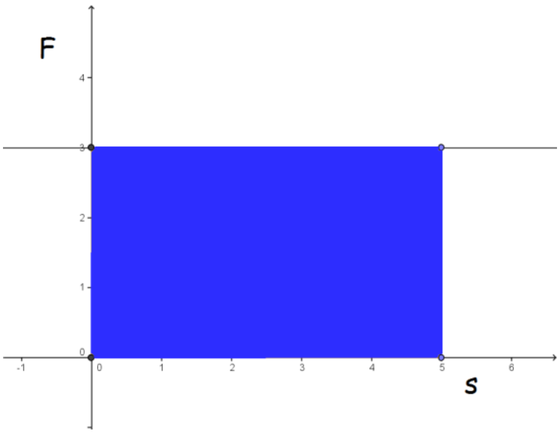
CALCOLO DEL LAVORO

LAVORO: grandezza scalare che è il prodotto dell'azione di una forza applicata ad un corpo per lo spostamento che essa causa.

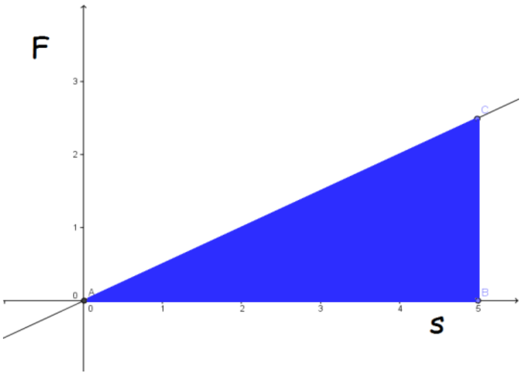
Esso può essere calcolato in due modi:

- Algebricamente, sapendo che $L = F_s * s$
- Geometricamente, calcolando, nel grafico cartesiano, l'area compresa tra la curva che descrive l'equazione della forza e l'asse delle ascisse

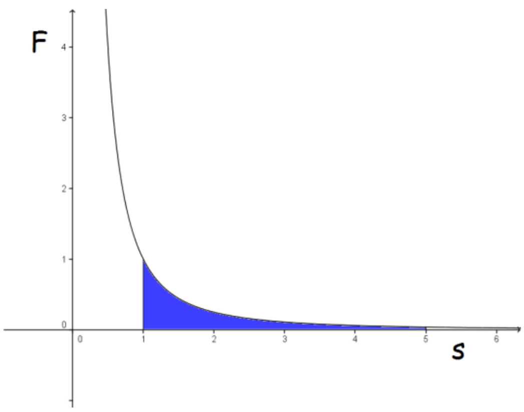
Rispetto a quest'ultimo caso vediamo tre casi:



Forza costante



Forza elastica

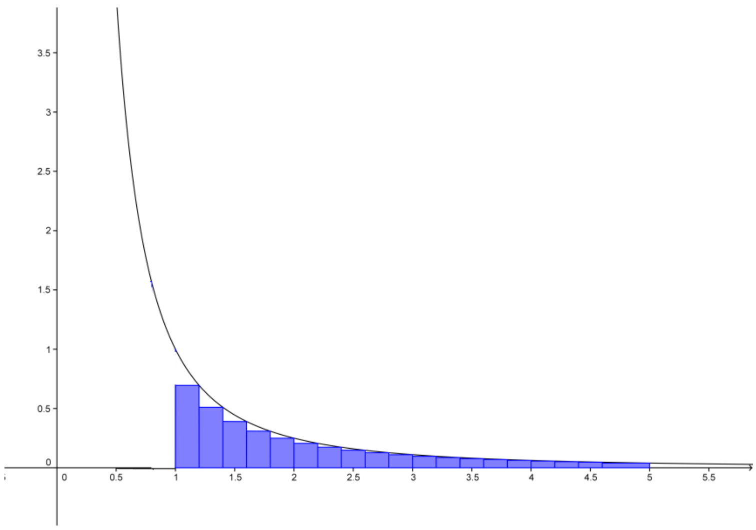


Forza elettrica

Nei primi due casi il lavoro, dal punto di vista geometrico, è facilmente calcolabile; ma nel terzo caso – in cui la forza è proporzionale a $\frac{1}{r^2}$ - stimare l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse, crea delle complicazioni.

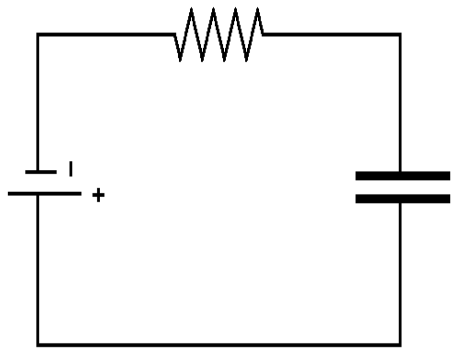
Prima del 1600 l'area in questione veniva calcolata per approssimazione con il metodo di esaustione rielaborato da Archimede per il segmento parabolico: l'area quindi veniva suddivisa in rettangoli che avessero tutti per base uno spostamento molto piccolo e per altezza il valore massimo o minimo assunto dalla forza in quella determinata parte di spostamento. Il calcolo dunque era semplice perché ricondotto ad una somma di aree di rettangoli con uguale base e altezza differente; ma il risultato trovato non poteva che essere approssimativo, dal momento che si dava all'altezza un determinato valore che non teneva conto della variazione, anche se minima, della forza nello spostamento utilizzato per base.

Ma con l'introduzione del concetto di integrale si riuscì ad evitare quest'approssimazione poiché l'area compresa tra la curva della forza e l'asse delle ascisse diventò facilmente ed esattamente stimabile con il calcolo integrale.



$$\int_1^5 \frac{1}{x^2}\, dx$$

CIRCUITO RC



ε = differenza di potenziale agli estremi del generatore
V_R = differenza di potenziale agli estremi del resistore
V_C = differenza di potenziale agli estremi del condensatore

ANALIZZO COSA ACCADE QUANDO CHIUDO L'INTERRUTTORE (FASE DI CARICA)
nell'stante t_0 ho:

- $V_C = 0$ (il condensatore è scarico)
- R è attraversato da corrente massima

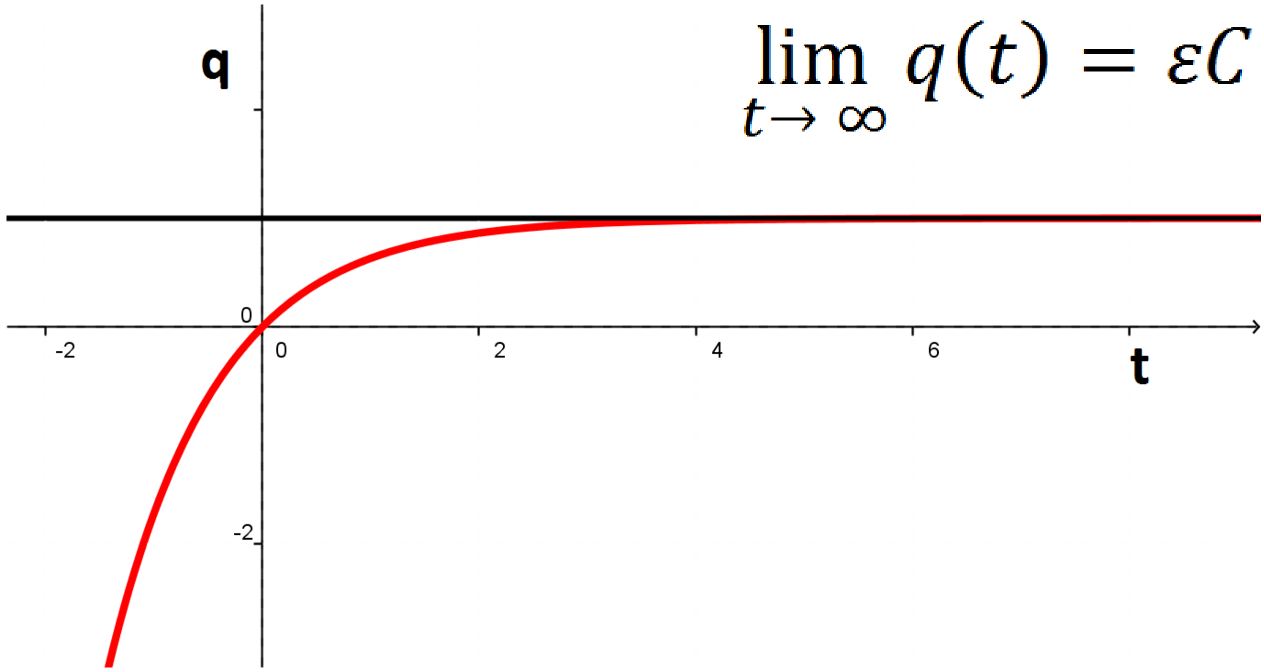
Dall'istante t_0 all'istante in cui il condensatore è completamente carico:

- V_C cresce (il condensatore si carica)
- VR diminuisce
- diminuisce la corrente

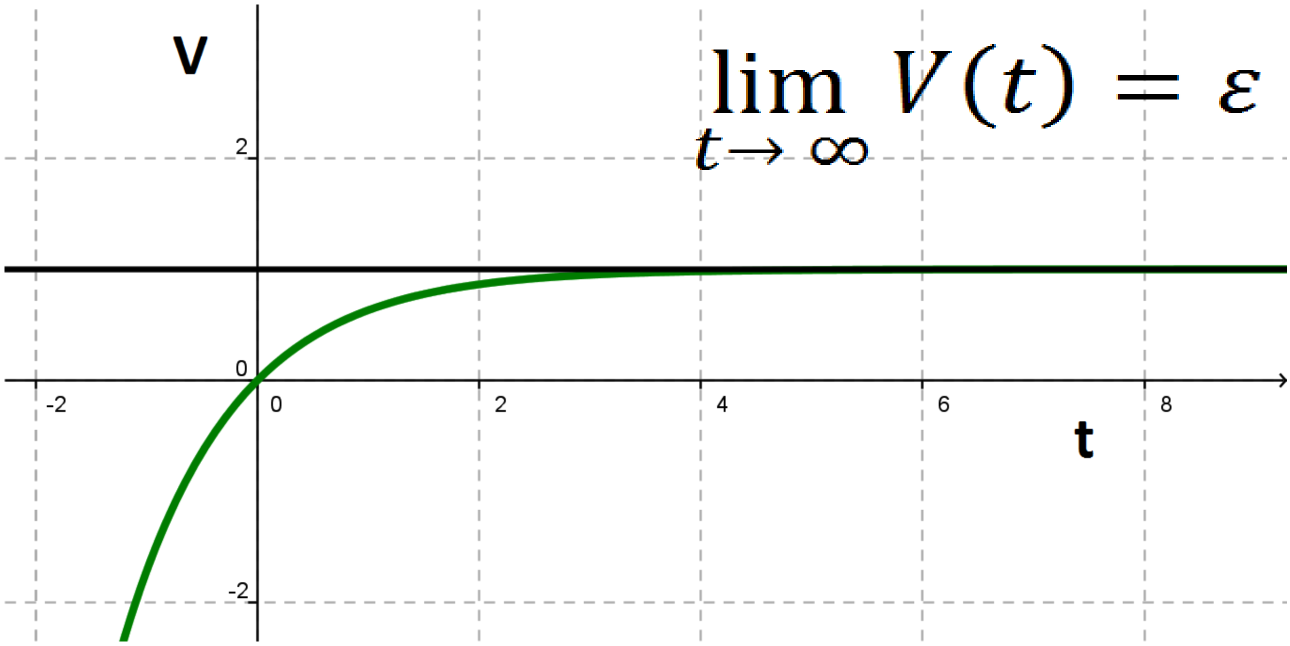
In un istante di tempo generico per il teorema della maglia che afferma che la somma algebrica delle differenze di potenziale calcolate agli estremi degli elementi del circuito è uguale a 0: $\varepsilon = VR + VC = iR + \frac{Q}{C}$
In un certo intervallo di tempo molto piccolo dt lascio fluire una quantità molto piccola di cariche dq. Ricordando che la corrente è definita come il rapporto di carica su tempo, posso interpretare l'equazione precedente in termini differenziali:

$\varepsilon = \frac{dq}{dt}R + \frac{Q}{C}$ **equazione differenziale a variabili separabili**

Quindi da $\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} - \varepsilon = 0$, separo le variabili facendo il denominatore comune
$\frac{dq*R*C + dt*q - \varepsilon*dt*C}{dt*C} = 0$ → -dt (q – $\varepsilon C) = dq * R * C$ → $\frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\varepsilon C - q}$
Col calcolo integrale dico che $\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{dq}{\varepsilon C - q}$ → $\frac{1}{RC} * t = \ln|\varepsilon C - q| * (-1) + k$
→ $\frac{t}{RC} = -\ln|\varepsilon C - q| + k$ visto che $\varepsilon C = Q$massima, sicuramente $\varepsilon C - q > 0$, posso quindi togliere il modulo: $\frac{t}{RC} = -\ln(\varepsilon C - q) + k$ → $-\frac{t}{RC} = \ln(\varepsilon C - q) + \ln k = \ln(\varepsilon C - q) * k$
Applico la definizione di logaritmo e ottengo: $e^{-\frac{t}{RC}} = k(\varepsilon C - q)$. C'è solamente un valore di k che risponde alle caratteristiche del circuito; per ricavarlo ricordo che nell'istante t_0: t = 0 e q = 0.
Sostituisco questi valori nell'ultima equazione trovata: $e^0 = k(\varepsilon C - 0)$, quindi $k = \frac{1}{\varepsilon C}$
Sostituisco il valore trovato $e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\varepsilon C}(\varepsilon C - q)$; semplifico e esplicito q $q = \varepsilon C\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$



Visto che $\Delta v = \frac{q}{C}$, $\Delta v = \frac{e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\varepsilon C}(\varepsilon C - q)}{C}$ → $V_C = \varepsilon\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

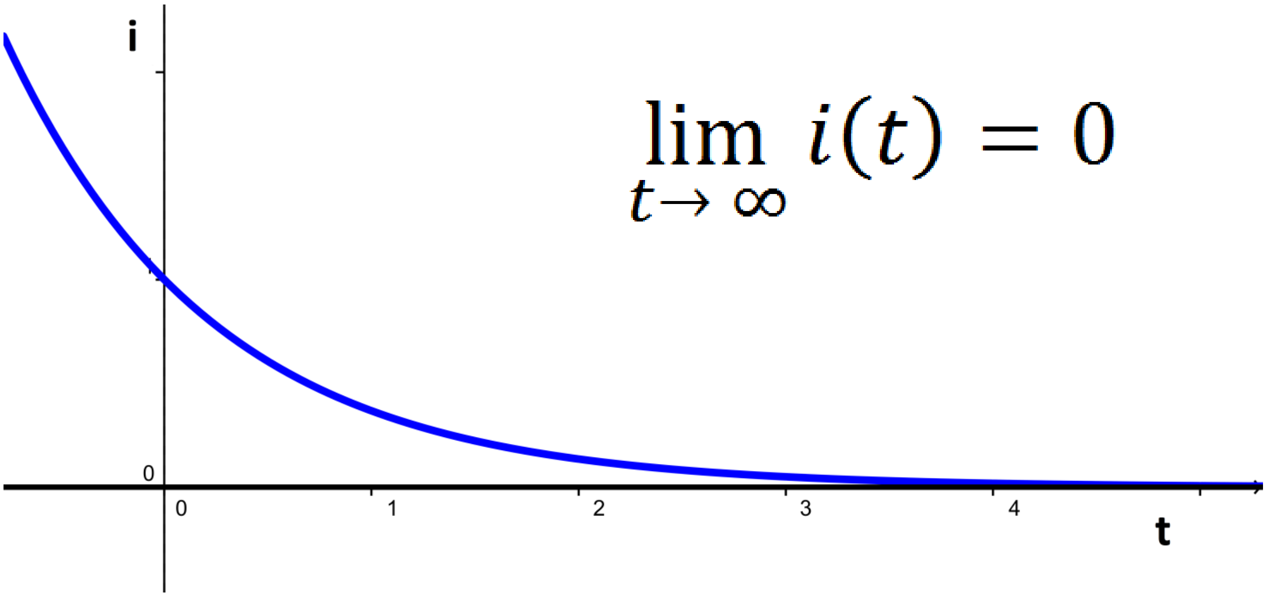


Per trovare l'espressione algebrica della corrente, riprendo $q = \varepsilon C\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ = Qmax $(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

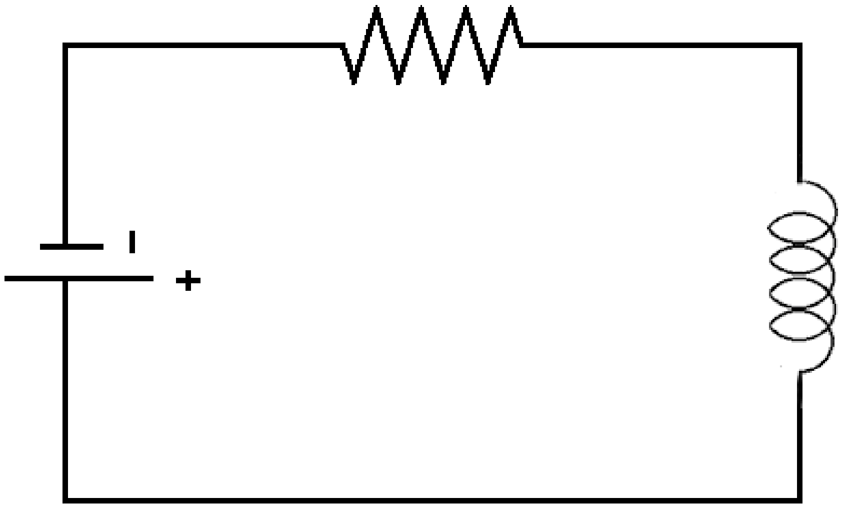
$i = \frac{dq}{dt}$ quindi $i = \frac{\text{Qmax}\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{dt} = \frac{\text{Qmax} - \text{Qmax}\, e^{-\frac{t}{RC}}}{dt}$.

Derivo: $i = 0 - Qmax * \left(-\frac{1}{RC}\right) * e^{-\frac{t}{RC}}$, quindi $i = \varepsilon C * e^{-\frac{t}{RC}} * \frac{1}{RC}$.

Facendo denominatore comune $i = \frac{C\varepsilon * e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$



CIRCUITO RL



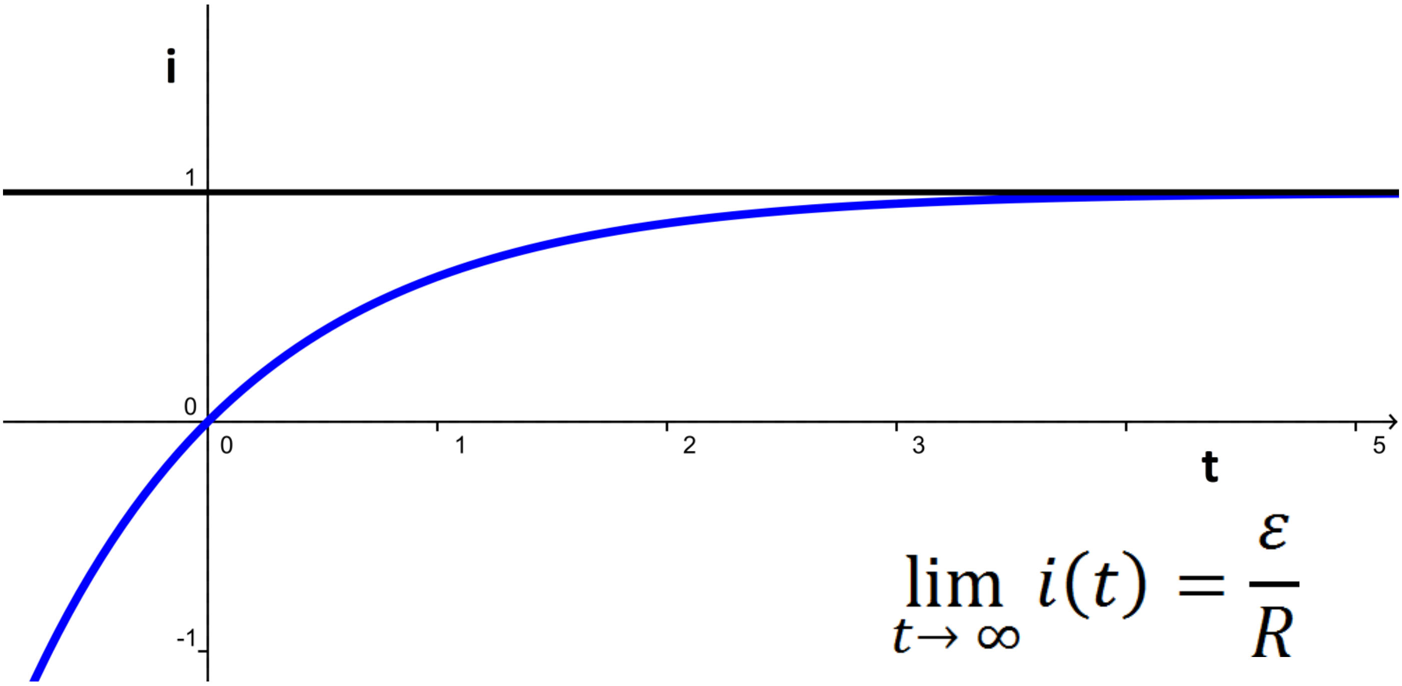
ε = differenza di potenziale agli estremi del generatore
V_R = differenza di potenziale agli estremi del resistore
V_L = differenza di potenziale agli estremi del solenoide

ANALIZZO COSA ACCADE QUANDO CHIUDO L'INTERRUTTORE (FASE DI CHIUSURA)
Nel momento in cui viene chiuso l'interruttore, nel circuito inizia a fluire corrente; quando passa una corrente variabile all'interno del solenoide, in esso si genera un campo magnetico variabile, il quale a sua volta genera corrente autoindotta (extracorrente di chiusura) nelle spire della bobina. Come dimostra Lenz, questa nuova corrente ha verso opposto alla corrente di partenza, quindi il generatore deve compiere del lavoro in più per vincere la corrente autoindotta, oltre che la resistenza del resistore.

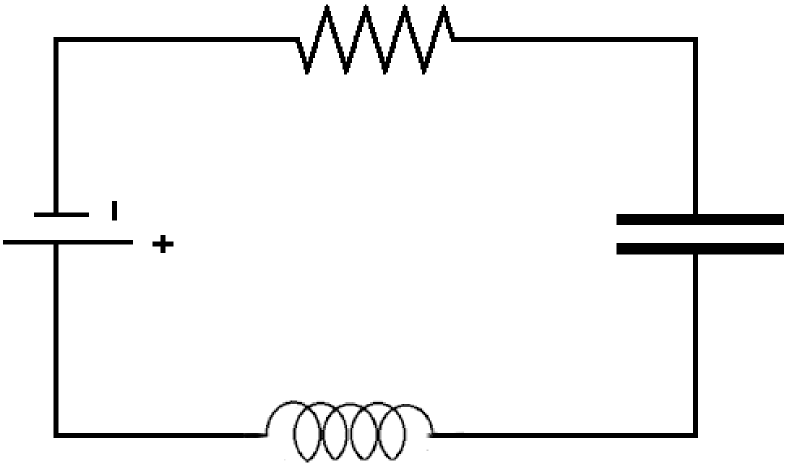
Per utilizzare il teorema della maglia come nel circuito precedente, bisogna trovare l'espressione della forza elettromotrice autoindotta. A questo scopo parto dalla legge di Neumann-Lenz: $fem = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t}$. Nel caso dell'autoinduzione Φ(B) = B * N * S ,e visto che B = $\mu 0 * \frac{N}{l} * i$
Φ(B) = $\mu 0 * \frac{N^2 S}{l} * i \to \Phi(\mathrm{B}) = Li$,dove L è il coefficiente di autoinduzione, che dipende dalle caratteristiche della bobina ed è uguale a $\mu 0 * \frac{N^2 S}{l}$. Visto che sto parlando di corrente autoindotta, parlo di un Δi e quindi anche di un $\Delta\Phi$(B)
$\Delta\Phi$(B) = L * Δi → sostituisco nella legge di Neumann-Lenz e ottengo che
$fem\ autoindotta = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$
Quindi tornando al teorema della maglia posso scrivere che ε $-L\frac{di}{dt}$ = iR
Faccio il denominatore comune e separo le variabili $\frac{dt}{L} = \frac{di}{\varepsilon - iR}$
Per poter essere facilitata nell'integrazione di questa equazione, compio dei calcoli per ottenere al denominatore (ε - iR) e al numeratore la sua derivata:
moltiplico entrambi i membri per (-R) → $\frac{di\,(-R)}{(\varepsilon - iR)} = -\frac{R * dt}{L}$ → $di\,(-R) = d(\varepsilon - iR)$ → $\frac{d(\varepsilon - iR)}{\varepsilon - iR} = -\frac{R}{L}dt.$ Integro $\int \frac{d(\varepsilon - iR)}{\varepsilon - iR} = \int -\frac{R}{L}dt$ e ottengo $\ln(\varepsilon - iR) = \frac{R}{L}t + k$
applicando la definizione di logaritmo ho $\varepsilon - iR = e^{-\frac{R}{L}t + k}$ e esplicitando i, trovo che
$i = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{e^{-\frac{R}{L}t} * e^k}{R}$.

Voglio trovare il valore di k, l'unico che risponde alle caratteristiche del circuito, e per farlo ricordo che nell'istante t_0: t = 0 e i = 0, quindi 0 = $\frac{\varepsilon}{R} - \frac{e^0 * e^k}{R} \rightarrow e^k = \varepsilon$

Dunque l'espressione della corrente nel circuito RL è $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$



CIRCUITO RLC



V_R = differenza di potenziale agli estremi del resistore
V_L = differenza di potenziale agli estremi del solenoide
V_C = differenza di potenziale agli estremi del condensatore

ANALIZZO COSA SUCCEDE QUANDO CHIUDO L'INTERRUTTORE E SOPPRIMO IL GENERATORE
Parto dall'ipotesi che la resistenza del circuito è piuttosto bassa.
La corrente cresce finché il condensatore non è caricato completamente, visto che ho soppresso il generatore le cariche ripercorrono il filo conduttore nel verso opposto verso l'altra lastra del condensatore; così si ha carica massima negativa. Ma la carica massima positiva è minore della carica massima positiva poiché la corrente andando verso l'altra lastra del generatore hanno dovuto compiere del lavoro per vincere la resistenza del resistore e la corrente autoindotta generatasi nel solenoide. Quando le cariche sono giunte tutte alla seconda lastra si fermano per un istante e poi ricominciano il loro percorso verso la prima lastra. Questo procedimento si sussegue molteplici volte, e ogni volta la corrente che scorre nel circuito è sempre minore.

Dal teorema della maglia, interpretato con i termini del calcolo differenziale:
$V_C + V_R + V_L = 0$ perché ho soppresso il generatore e quindi $\varepsilon = 0$ $\frac{q}{C} + R\,\frac{dq}{dt} + L\,\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{q}{C} + R\,\frac{dq}{dt} + L\,\frac{d\left(\frac{dq}{dt}\right)}{dt} \rightarrow \frac{q}{C} + R\,\frac{dq}{dt} + L\,\frac{d^2q}{dt^2}$ **equazione differenziale del secondo ordine, lineare e omogenea, a coefficienti costanti**
Del secondo ordine = sono presenti derivate seconde
Lineare = y ha grado 1
Omogenea = l'equazione è pari a 0
A coefficienti costanti = nell'equazione tutti i termini presenti eccetto le variabili e i loro differenziali sono costanti

Quindi ho $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$, oppure $q''(t) + \frac{R}{L}q'(t) + \frac{1}{CL}q(t)$ che in termini più generali si può scrivere come $q'' + Aq' + Bq = 0$
Una delle proprietà di questo tipo di equazione è che ad essa è associata un'equazione caratteristica $z^2 + Az + B$

- Se z_1 e z_2 sono soluzioni reali e distinte (quindi $\Delta > 0$), l'integrale generale che risolve l'equazione differenziale è $y = e^{\alpha x}$
- Se z_1 e z_2 sono soluzioni reali coincidenti (quindi $\Delta = 0$), l'integrale generale che risolve l'equazione differenziale è $y = xe^{\alpha x}$

- Se z_1 e z_2 sono soluzioni complesse e distinte (quindi $\Delta < 0$), l'integrale generale che risolve l'equazione differenziale è $y = Ae^{\alpha x}\sin(\varphi + \beta x)$
  [con z che è numero immaginario $z = \alpha + i\beta$]

Nel caso che sto analizzando le soluzioni sono complesse; prendo quindi in analisi l'ultimo caso: calcolando che le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $z_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega$, (essendo $\omega = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}$) trovo che l'integrale generale è $q = De^{-\frac{R}{2L}t} \cos\,(\omega t - \varphi)$, e, visto che i è la derivata di q rispetto al tempo, derivo l'integrale generale di q e trovo che l'espressione dell'intensità di corrente è $i = \left[\frac{R}{2L}\cos(\omega t - \varphi) + \omega\sin(\omega t - \varphi)\right]De^{-\frac{R}{2L}t}$, con D e φ costanti da determinare.

Per determinarle considero le condizioni iniziali: in t_0: $t = 0$, $q = q_0$, $i = 0$
$q_0 = De^0 \cos(0 - \varphi) = D\cos(-\varphi)$, quindi $D = \frac{q0}{cos\varphi}$.

Ora prendo in considerazione la corrente e nelle condizioni iniziali ho:

$$0 = \left[\frac{R}{2L}cos\varphi + \omega\sin(-\varphi)\right]De^0 = \left[\frac{R}{2L}cos\varphi - \omega\sin\varphi\right]\frac{q0}{cos\varphi} = \frac{Rq0}{2L} - \frac{\omega * q0 * sin\varphi}{cos\varphi}$$

$$= \frac{Rq0}{2L} - \omega * q0 * tg\varphi \rightarrow tg\varphi = \frac{R}{2L\omega}.$$

Ripartendo da $i = \left[\frac{R}{2L}\cos(\omega t - \varphi) + \omega\sin(\omega t - \varphi)\right]\frac{q0}{cos\varphi} * e^{-\frac{R}{2L}t}$ e svolgendo le differenze di seno e coseno, ottengo:

$$i = \left[\frac{R}{2L} * (cos\omega t cos\varphi + sin\omega t sin\varphi) + \omega(cos\omega t sin\varphi - cos\varphi sin\omega t)\right]\frac{q0}{cos\varphi} * e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$= \left[\frac{Rq0}{2L}\left(\frac{cos\omega t cos\varphi}{cos\varphi} + \frac{sin\omega t sin\varphi}{cos\varphi}\right) + \omega q0\left(\frac{cos\omega t sin\varphi}{cos\varphi} - \frac{cos\varphi sin\omega t}{cos\varphi}\right)\right]e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$= \left[\left(\frac{Rq0}{2L}\ cos\omega t + \ sin\omega t * \frac{Rq0}{2L} * tg\varphi\right) + \ (cos\omega * \ \omega q0 * tg\varphi - \omega q0 * sin\omega t)\right]e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$= \left[\left(\frac{Rq0}{2L}\ cos\omega t + \ sin\omega t * \frac{Rq0}{2L} * \frac{R}{2L\omega}\right) + \left(cos\omega * \ \omega q0 * \frac{R}{2L\omega} - \omega q0 * sin\omega t\right)\right]e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$= \left(sin\omega t * \frac{Rq0}{2L} * \frac{R}{2L\omega} - \omega q0 * sin\omega t\right)e^{-\frac{R}{2L}t} = \left(\frac{R^2}{4L^2\omega} + \ \omega\right)q0e^{-\frac{R}{2L}t}sin\omega t$$

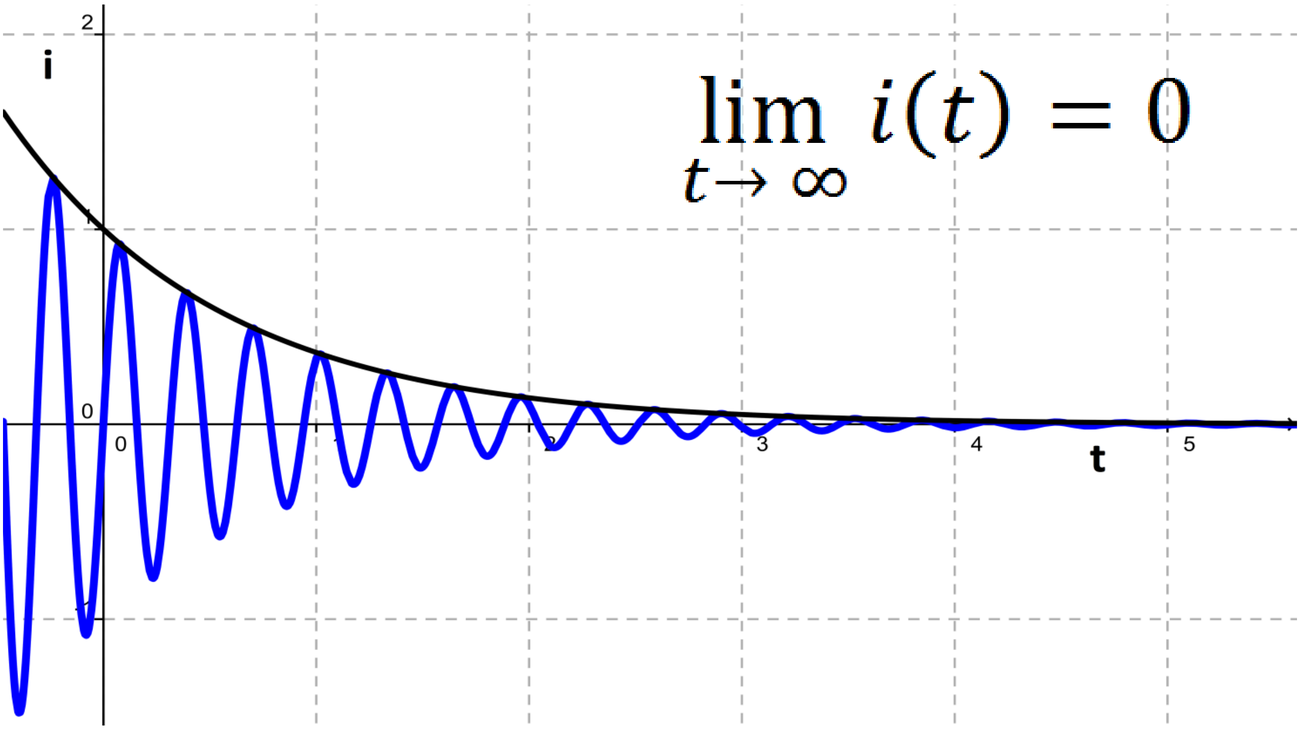
Quindi $i = q0 * sin\omega t\left(\frac{R^2}{4L^2\omega} + \ \omega\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$ e facendo il denominatore comune ottengo che

$$i = q0 * sin\omega t\left(\frac{R^2 + 4L^2\omega^2}{4L^2\omega}\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$$

poiché $\omega^2 = \frac{1}{4L^2}\left(\frac{4L}{C} - R^2\right)$ ho che $i = q0 * sin\omega t\left[\frac{R^2 + 4L^2 * \frac{1}{4L^2}\left(\frac{4L}{C} - R^2\right)}{4L^2\omega}\right]e^{-\frac{R}{2L}t}$

$$= q0 * sin\omega t\left[\frac{CR^2 + 4L + CR^2}{4L^2\omega C}\right]e^{-\frac{R}{2L}t} = q0 * sin\omega t\left[\frac{1}{L\omega C}\right]e^{-\frac{R}{2L}t}$$

In conclusione si può affermare che $i = \frac{q}{LC\omega}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\, sin\omega t$



BIBLIOGRAFIA

- FONDAMENTI DI CALCOLO ALGEBRICO E GEOMETRIA ANALITICA (M. Bergamini; A. Trifone; G. Barozzi)
- LE LEGGI DELLA FISICA VOL. A (A. Caforio; A. Ferilli)
- LE LEGGI DELLA FISICA VOL. B (A. Caforio; A. Ferilli)
- LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NELLO STUDIO DEI CIRCUITI ELETTRICI (Giovanni Metta)
- NUOVI ELEMENTI DI MATEMATICA (Dodero; Baroncini; Manfredi)
- EQUAZIONI DIFFERENZIALI – TRASFORMAZIONE DI LAPLACE (V.E. Bononcini; A. Forlani)